

## Matemaatikaõpe – mitte ainult ülesannete lahendamine

Madis Lepik, Tallinna Ülikool

Uus õppekava (Gümnaasiumi..., 2011) seab matemaatikaõppe eesmärgiks õpilaste matemaatika-pädevuse kujundamise. Matemaatikapädevus tähendab õppekavas muuhulgas „*loogilise arutlemise, põhjendamise ja tõestamise oskust, /.../. hõlmab üldist probleemi lahendamise oskust, mis sisaldab endas oskust probleeme püstitada, sobivaid lahendusstrateegiaid leida ja neid rakendada, lahendusideed analüüsida, tulemuse tõesust kontrollida.*“

Veel nõuab ainekava, et „*gümnaasiumi lõpetaja:*

- *mõistab ja analüüsib matemaatilisi tekste, esitab oma matemaatilisi mõttekäike nii suuliselt kui ka kirjalikult;*

- *arutleb loovalt ja loogiliselt, leiab probleemülesande lahendamiseks sobivaid strateegiaid ning rakendab neid;*

- *püstitab matemaatilisi hüpoteese, põhjendab ja tõestab neid.*“

Küsime nüüd, kuivõrd meie igapäevane matemaatikaõpe eelkirjeldatud taotlusi realiseerib?

Mitmed uurimused näitavad, et 80% koolitööst langeb kognitiivse taksonoomia madalaimale - teadmiste tasemele (Kreitzberg, 1987). Seega eelkirjeldatud matemaatikapädevusi paraku kuigivõrd ei kujundata. Traditsiooniline koolimatemaatika on formaalne, taoline õppimine tugineb põhiliselt mäluprotsessidel ja seda võib kirjeldada alljärgnevalt.

-Õpetatav on jaotatud paljudeks üksikteemadeks, mis siis üksteise järel “läbi võetakse” (“Tänane uus teema on...”). Õpilase jaoks jäävad nii omandatud teadmised pahatihti eklektiliseks kogumiks ja tervikpilti matemaatikast kui tihedalt seotud mõistete süsteemist ei teki.

-Õppeprotsess kujuneb formaalsete üksikteemade lihvimiseks ja valmistõdede äraõppimiseks. Enamasti omandatakse reeglid, eeskirjad, põhiseosed ja lahendatakse nende kinnistamiseks arvukalt treeningülesandeid.

-Ühelt poolt kujundab selline õpe õpilases veendumuse matemaatikast kui kõrgest ja elukaugest. Paljude õpilaste jaoks on koolimatemaatika lõputu hulk sisutuid ja elukauged reegleid ning valemeid, mis tulevad tarkadest raamatutest ja mis on vaja ära õppida. Eelkõige seondub matemaatika õpilasetele aga ülesannete lahendamisega, nn teooriat omandatakse ju selleks, et kiiresti edasi liikuda matemaatikatunni põhitegevuse – ülesannete lahendamise juurde.

### **Koolimatemaatika õppimine ei sarnane matemaatikaga reaalselt tegelemisega.**

Matemaatika on palju enam kui lihtsalt reeglite äraõppimine ja tüüpülesannete (mis võivad olla ka väga keerukad) lahendamisoskus. Pikad “rehkendused” pole matemaatika, matemaatika seisneb pigem leiutamises, kuidas neid pikki arvutusi optimaalsemalt sooritada. Teadmine, kuidas skitseerida etteantud ruutfunktsioonile vastavat parabooli, eeldab vaid teatud reeglite järgimist. Kuid selgitada välja, miks teatud tüüpi funktsioonide graafiliseks esituseks on parabool ning kuidas selle funktsiooni parameetrid määravad parabooli kuju ning asendit – see on tõeliselt matemaatiline tegevus.

Matemaatikateadmised on talletunud seoste otsimise ja probleemide lahendamise resultaadina. Seejuures on need probleemid reeglina tõusnud reaalsest elust. Ka koolimatemaatika peaks oma olemuselt, oma tegevuse laadilt enam sarnanema tegeliku matemaatikaga: olema otsinguline ja loov, mitte kaanoneid reprodutseeriv. Niisamuti nagu pole muusikateooriast sadade faktide

tundmine veel muusika tegemine – musitseerimine, ei ole ka rutiinsete matemaatiliste teadmiste omandamine veel tõeline matemaatikaga tegelemine. Olemegi jõudnud ainekavas matemaatika-pädevusena sõnastatud matemaatikaõppe ühe põhieesmärgini: **lisaks ülesannete lahendamisele peaks õpilane olema kaasatud ka nn matemaatika tegemise protsessi**. Selle eesmärgi realiseerimine tähendab aktsentide mõningast ümberasetamist ja ülesannete lahendamisega võrdselt ka loogilise arutlemise ja seoste mõistmise ning nende iseseisva tuletamise väärtustamist. Nentigem, et meie traditsioonilises koolimatemaatikas on protseduurilised oskused ja vilumused tugevalt eelisarendatavad võrrelduna probleemide lahendamise, seoste otsimise ja üldistuste sõnastamise ehk siis iseseisva matemaatika „tegemisega“ .

**Ilmselt peaks toimuma nihe koolimatemaatika eesmärkide käsitluses:** peaksime õppima väärtustama mitte niivõrd formaalset lõpptulemust (kindlad baasteadmised, reeglite, valemite kasutamine, ranged definitsioonid) kuivõrd matemaatikaga mõtestatud tegelemise protsessi. Matemaatika õppimine peaks senisest märksa enam toimuma sellega reaalse tegelemise kaudu , õpilasele tähenduslike probleemide lahendamise kaudu. Viimasega seonduvad sellised terminid nagu probleemõpe, avastusõpe, uurimuslik õpe: õpilased peaksid tegelema matemaatikaga selle sõna otseses mõttes, st aktiivselt otsima seoseid, iseseisvalt sõnastama üldistusi ja seejärel oma tulemusi ka põhjendama.

Verbid, mis peaksid kirjeldama matemaatikaga aktiivset tegelemist, st selliste probleemide lahendamist, mis omaksid õpilasele sisulist tähendust, on: uurima, avastama, järeldama, formuleerima, konstrueerima, seoseid otsima, lahendama, selgitama, ennustama, kirjeldama, tõestama jne. Kuivõrd iseloomustab aga toodud loetelu realselt matemaatikatunnis toimuvaid tegevusi?

See, mida õpilased õpivad, on otseselt seotud sellega, kuidas nad õpivad (tunni ülesehitus ja õpiülesannete valik). Aktiivset vaimset tegevust genereeriva matemaatikatunni keskmes on õpilaste sisukas matemaatiline arutlemine, mille käivitajaks on õnnestunult valitud probleem ja taustaks toetav ning julgustav klassi atmosfäär (Lester, Lambdin, 2004).

- **Arutelu tekitav probleem**

Rutiinne matemaatika ei motiveeri, ei tekita tunnetushuvi. Seetõttu peaks matemaatika õppimise teljeks kujunema probleemide lahendamine. Nii pakuksime ka koolis matemaatikateadmisi vähemalt osaliselt viisil, kuidas need tegelikult tekivad.

Kui meie eesmärgiks on õpilastes arendada loogilise arutelu võimet, siis peame hoolega valima tunnitegevusi. Mõistagi pakub enim võimalusi selleks loov töö – ülesanded, kus õpilased peavad ise otsima probleemidele lahendusi, sõnastama üldistusi ja püüdma tõestada nende paikapidavust. Sel moel suudavad õpilased, sobivalt kavandatud tööjuhendite põhjal tegutsedes, iseseisvalt „avastada“ paljusid matemaatilisi seoseid. Arusaadavalt pole taoline tunnitegevuse kavandamine kerge, nõuab õpetajalt piisavalt kogemusi, aga sageli ka paremat matemaatikatundmist kui pelgalt õpiku teksti ümberjutustamine. Avastusõppe korral asendame valmisteadmiste esitamise (või mõne etapi sellest) protsessiga, kus õpetaja sõnastab probleemi ja suunab õpilaste otsinguprotsessi probleemi lahendamisel. Rahvusvahelise võrdlusuuringu TIMSS tippude, Aasia tiiigririikide matemaatikaõppe uurimisel selgus, et just avastusõpe kuulus nende igapäevasesse tunnirutiini. Usun, et asja olemus on ka meie õpetajale selge, mõtete tekitamiseks alljärgnevas siiski mõned näited.

Mõnikord piisab hea uurimisprobleemi saamiseks tavaülesande „ümberpööramisest“. Nii näiteks saame tüüpilise ruutfunktsiooni graafiku skitseerimise ülesande transformeerimisel probleemi: etteantud graafiku – parabooli – põhjal olgu vaja koostada vastav analüütiline esitus – funktsiooni avaldis. Probleemi lahendamine suunab õpilast kriitiliselt mõtestama oma teadmisi ruutfunktsioonist ja selle graafikust ning muudab rutiinse parabooli skitseerimise sisuliseks ja uurivaks tegevuseks.

Teine näide sisaldab aritmeetilise jada olemuse uurimiseks koostatud tööjuhendit:

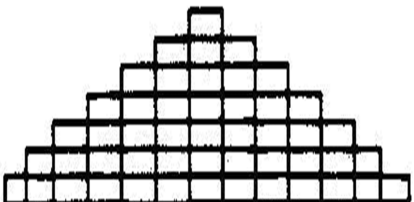
### Tööjuhend

Hakkame uurima aritmeetilisi jadasid.

Alljärgnevas on toodud nende kohta rida näiteid, st konkreetseid aritmeetilisi jadasid.

Samuti on esitatud rida kontranäiteid, st konkreetseid jadasid, mis pole aritmeetilised.

Uurige näiteid ja kontranäiteid ning püüdke seejärel lahendada alljärgnevad ülesanded.

Näited	Kontranäited
a) 3; 3,1; 3,2; 3,3; 3,4; 3,5; ...	a) 7; 0,7; 0,007; 0,0007; 0,00007; ...
b) 152; 141; 130; ...; 20; 9; -2; -13; ...	b) 46; 6,78; 2,60; ...; 1,02; 1,00; 1,00;...
c) TV õnnemäng algas 50 eurost. Iga järgneva küsimusega suurenes võidusumma 10 eurot. Ja nii kuni esimese valevastuseni.	c) Sissemaks pangaarvele oli 100 eurot. Igakuiselt suurenes see 2% intressi võrra. Vaatleme pangaarvet iga kuu lõpus.
d) 22,6; 22,6; 22,6; 22,6; ...	d) ...;16; 9; 4; 1; 0; 4; 16; ...
e) Ruudukeste arv alljärgneva kujundi esimeses, teises jne reas	e) 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; ...
	

1. Iga jada puhul püüdke leida nende moodustamise seaduspärasus.
2. Mille poolest on näidetena esitatud jasad omavahel sarnased? Mille poolest nad erinevad kontranäidetest?
3. Teades, et esimeses veerus toodud jasad olid aritmeetilised, püüa sõnastada aritmeetilise jada olemus.
4. Leia näites a toodud aritmeetilise jada 20. liige.
5. Mitmes näites b toodud aritmeetilise jada liige on väärtusega 20?

6. Milliseid suuruseid on Sul vaja teada, et välja arvutada aritmeetilise jada mistahes liikme väärtus?

Taolise tööjuhendi kasutamisel saame õpetaja teemakohase presentatsiooni asendada õpilaste endi otsingute ja avastustega. Ja arusaadavalt kaasneb sellega ka oma „avastuste“ kaaslastele selgitamine ja põhjendamine. Nii omandatu jääb õpilastele loomulikult ka kindlamini meelde.

- **Arutlemine**

Vähemalt sama oluline kui valemite memoreerimine ja neid rakendavate ülesannete lahendamisoskuse treenimine on kujundada õpilastes valmisolek kasutatavaid seoseid ja mõtteloogikat selgitada ning põhjendada. Just arutlemine - matemaatiliste toimingute selgitamine ning põhjendamine on aluseks arusaamisele-mõistmisele ja muudab õppeprotsessi mõtestatuks. Arutlemine tugineb matemaatilisele loogikale. Jõukohane arutlemine loob aluse ka õpilase matemaatiliseks arenguks.

Kui näeme arutlusoskuse arendamises olulist õpieesmärki, siis peame selle arendamiseks pakkuma õpilastele ka sihipärast tegevust. Arutlusoskus areneb mõistagi klassiruumis, kus õpetaja asemel saavad rohkem sõna õpilased. Ses mõttes on parimaks õppevormiks rühmatöö. Probleemide lahendamine pole vaikne nokitsemine. Et testida omi ideid ja arutluskäike, peavad õpilased neid verbaliseerima. Just rühmatöö on töövorm, mis võimaldab õpilastel arutleda, diskuteerida. Kui klassis töötab 7 väikest rühma, on igal rühmaliikmel seitse korda rohkem võimalusi ja aega oma mõtete ja küsimuste esitamiseks ning kaaslastega arutamiseks. Rühmatöö eeliseks on ka see, et nii saavad nõrgemad õppida tugevamatelt, kuidas arutleda ja lahendada probleeme. Ühistööga kaasnev interaktsioon on juba iseenesest õpilastele motiveeriv.

- **Arutelu soosiv klassi atmosfäär**

Õpetaja poolt tunnitegevuse juhtimiseks esitatavad küsimused määravad suuresti tunni atmosfääri ja õpilaste tegevuse iseloomu. Kui soovime neid innustada iseseisvalt probleeme uurima ja julgustada oma arvamusi ning ideid välja ütleva ja kaaslastega arutama, siis peame oskama seda oma küsimistega esile kutsuda.

Küsimused on vahendid, mis aitavad õpetajal mõista ja toetada õpilaste matemaatilist mõtlemist. Õpetaja peaks võimaldama õpilastel iseseisvalt või väikeses rühmas mõelda ja arutleda ning peaks seejuures sekkuma küsimustega vaid siis, kui õpilased pole võimelised iseseisvalt edasi liikuma. Sellised küsimused peavad olema suunavad, aga samas siiski piisavalt üldised, et mitte ühte konkreetset lahendusideed peale suruda ja õpilased avastamisrõõmust ilma jätta. Isegi kui õpilased on valinud perspektiivitu lahendustee, peaks laskma neil see lõpuni käia, enne kui suunata uuele otsingurajale.

Ühe uurimuse andmetel esitab matemaatikaõpetaja aasta jooksul oma õpilastele ca 80 000 küsimust, tema õpilased aga igauks ca 10. Seega on õpetajad monopoliseerinud küsimisõiguse. Arutlemist soosiv klassi atmosfäär eeldab aga ka õpilastepoolset küsimisaktiivsust, diskussiooni, ja õpetaja hoiakut, et kõik arvamusteavaldused on teretulnud, puudub üks ja ainuõige vaatenurk. Õpetaja kutseoskuste loetellu lisandub seega ka aktiivse kuulamise oskus.

- **Enesekontrollioskuste kujundamine**

Pahatihti kujundab formalistlik koolimatemaatika õpilastes hoiaku, et vaid õpetaja suudab otsustada tulemuste õigsuse üle. Uuriva õppimise puhul on õpilased ise orienteeritud hindama oma tulemuste tõepärasust. Vajab ju iga "avastus" selgitusi ja põhjendusi. Teada, et vastus on

tõepärane, tähendab, et sellel on reaalne tähendus, et seda on võimalik mõtestatult seletada. Nii muutub ka põhjendamine ning tõestamine teadmiste omandamise protsessi loomulikuks osaks.

### **Kokkuvõtteks**

Matemaatikatunni põhitegevuseks ei peaks olema vaid ülesannete lahendamine, sinna peaks kuuluma ka jõukohane uurimine ja avastamine – omal käel matemaatika tegemine. Arusaadavalt võtab see rohkem aega: sellele, mille õpetaja räägiks ära kümnekonna minutiga, kulub õpilastel iseseisvalt puurides võib-olla terve tund. Ometi on see mõistlik investeering – just nii pakume ju sihipärast tegevust õpilaste arutlusoskuse ja matemaatilise loovuse arendamiseks. Ja lisaväärtuseks on ahaa-elamus ning säravad silmad, ehk ka arusaam, et matemaatika ei pruugigi olla nii igav ja kättesaamatu.

### **Kasutatud kirjandus**

Gümnaasiumi riiklik õppekava. 2011. <https://www.riigiteataja.ee/akt/114012011002>

Kreitzberg, P. 1987. Õppe-kasvatustöö eesmärkide klassifitseerimise ja konkretiseerimise psühholoogilis- metoodilised lähtekohad. Tallinn, Haridusministeerium.

Lester, F.K., Lambdin, D.V. 2004. Teaching mathematics through problem solving. In: B. Clarke a.o. (Eds.). International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics. Göteborg University. P.189- 203.