Gümnaasiumi matemaatika laia kursuse õppe kirjeldus

Üldisi märkusi

Gümnaasiumi matemaatika laia kursuse õppe korraldamisel tuleb lähtuda järgmistest **ainekavas** märgitud põhiseisukohtadest[1].

1. *Lai matemaatika annab ettekujutuse matemaatika tähendusest ühiskonna arengus ning selle rakendamisest igapäevaelus, tehnoloogias, majanduses, loodus- ja täppisteadustes ning muudes ühiskonnaelu valdkondades. Selle tagamiseks lahendatakse rakendusülesandeid, kasutades vastavat IKT tarkvara. Tähtsal kohal on tõestamine ja põhjendamine.*
2. *Laias matemaatikas käsitletakse mõisteid ja meetodeid, mida on vaja matemaatikateaduse olemusest arusaamiseks. Selleks vajalik keskkond luuakse matemaatika mõistete, sümbolite, omaduste ja seoste, reeglite ja protseduuride käsitlemise ning intuitsioonil ja loogilisel arutelul põhinevate mõttekäikude esitamise kaudu.*
3. *Lai matemaatika annab õppijale vahendid ja oskused rakendada teistes õppeainetes vajalikke matemaatilisi meetodeid.*
4. *Lai matemaatika võimaldab jätkata õpinguid kõrgkoolis neil erialadel, kus reaalainetel on suur osatähtsus.*

Sellest tulenevalt on laia kursuse **ainekava** üldised õppe-eesmärgid, et õpilane:

1) *saab aru matemaatikakeeles esitatud teabest ning esitab oma matemaatilisi mõttekäike nii suuliselt kui ka kirjalikult;*
2) *valib, tõlgendab ja seostab erinevaid matemaatilise info esituse viise;*
3) *arutleb loogiliselt ja loovalt, arendab oma intuitsiooni;*
4) *püstitab matemaatilisi hüpoteese ning põhjendab ja tõestab neid;*
5) *modelleerib erinevate valdkondade probleeme matemaatiliselt ning hindab kriitiliselt matemaatilisi mudeleid;*
6) *väärtustab matemaatikat ning tunneb rõõmu matemaatikaga tegelemisest;*
7) *kasutab matemaatilises tegevuses erinevaid teabeallikaid ning hindab kriitiliselt neis sisalduvat teavet;*
8) *kasutab matemaatikat õppides IKT vahendeid.*

Allpool on esitatud mõningaid soovitusi, kuidas käsitleda laia kursuse teemasid.

Kursuse teemasid käsitledes tuleb niipalju kui võimalik lähtuda reaalset konteksti sisaldavatest ülesannetest ning korrata uute teemade omandamiseks vajalikku varem õpitud materjali. Ainekavas rõhutatud rakendussisuga ülesannete lahendamine on enamasti töömahukas, aegaviitev ning seotud funktsionaalse lugemise oskusega. Seetõttu tuleb nende lahendamiseks varuda piisavalt õppeaega. Samuti on vaja õppes

[1] Siin on väljavõtted ainekava tekstist esitatud kursiivkirjas.

kasutada IKT vahendeid ja võimalusi. Ainekavas ja järgmiste kursuste soovitustes näidatud ainese esitamise järjestus on soovituslik. Õppe kirjelduses on esile toodud üldpädevused, eelduskursused, teadmiste ja oskuste täpsustused, soovitused (hindamine, metoodika, õpikeskkond jne), näited A-, B- ja C-taseme ülesannete kohta ning lõimimise võimalused.

1. kursus

Avaldised ja arvuhulgad

Eesmärgid:
1) korrata ja teadvustada arvude maailma ning arvutamise maailma põhimõisteid;
2) laiendada seda ratsionaal- ja irratsionaalavaldistele.

Üld- ja ainepädevused:
1) suutlikkus kasutada vastavale alateemale omast keelt, sümboleid ning meetodeid. Selleks nõuda kirjalikus ja suulises eneseväljenduses distsiplineeritult mõistete ning keelesümboolika kasutamist;
2) suutlikkus arutleda loovalt ja loogiliselt;
3) suutlikkus põhjendada ja tõestada oma mõttekäike ning luua üksikteadmistes süsteemi;
4) suutlikkus analüüsida ja esitada alternatiive ning oskus teha valikuid. Selleks käsitleda üht ülesannet eri vaatenurkadest ja soodustada erinevate lahendusteede otsimist;
5) suutlikkus reflekteerida oma tegevust ning kriitiliselt hinnata tegevuse resultaati. Selleks suunata õpilast esitama iseendale küsimusi: mida ma teen; miks ma nii teen; milleni ma olen jõudnud ning kas tulemus on õige ja kontrollitav.

Ülesannete raskusaste:
A – tüüpilisi algoritme rakendav arvutus- või teisendusülesanne;
B – ühe- või kaheetapilise suhteliselt tuntud mudeli koostamise ja rakendamise ülesanne;
C – mitmeetapilise mudeli loomise ja rakendamise ülesanne.

Õpitulemused	Õppesisu	Oskuste ja teadmiste täpsustused	Soovitused
Õpilane:	Naturaalarvude hulk **N**, täisarvude hulk **Z**,	Soovitus on alustada arvuhulkadest **N**, **Z**, **Q**, **I**, **R** ja **C**; vaadelda võiks	Võimekamad õpilased võiksid **naturaalarvude** hulga juures peatuda arvuhulga järgnevuse

1) selgitab naturaalarvude hulga **N**, täisarvude hulga **Z**, ratsionaalarvude hulga **Q**, irratsionaalarvude hulga **I** ja reaalarvude hulga ***R*** omadusi; 2) defineerib arvu absoluutväärtuse; 3) märgib arvteljel reaalarvude piirkondi;	ratsionaalarvude hulk **Q**, irratsionaalarvude hulk **I** ja reaalarvude hulk **R**, nende omadused. Reaalarvude piirkonnad arvteljel. Arvu absoluutväärtus.	hulkade omadusi aritmeetiliste tehete suhtes. Samuti väärib käsitlemist see, et iga ratsionaalarv avaldub lõpmatu perioodilise kümnendmurruna ja vastupidi – iga lõpmatut perioodilist kümnendmurdu saab esitada hariliku murruna: 12,2 = 12,200000… = 12,2(0); 1,1(31) = x, siis 1000x = 1131,313131…. ja 10x = 11,313131… ning seega 1000x – 10x = 1120, $x=\frac{1120}{990}=\frac{112}{99}$ Korratakse jäägiga jagamist ning jaguvustunnuseid. Rõhutatakse, et jaguvust käsitletakse täisarvude hulgas, jäägiga jagamist ning paaris- ja paarituid arve naturaalarvude hulgas.	omadusel ning käsitleda tõestusmeetodina täielikku matemaatilist induktsiooni. See võimaldab tõestada erinevaid teoreeme, mis on seotud naturaalarvude hulgaga, ning annab oskuse püstitada hüpoteesi ja seejärel see tõestada. **Täisarvude** korral peaks tutvustama arvu vastandarvu mõistet, et oleks üheselt arusaadav, miks $-(-45)=45$. Märkida võiks ka arvuga 0 jagamist kui sellist, mida ei ole võimalik sooritada. Tähelepanu tuleb pöörata sellele, et iga kahe ratsionaalarvu vahel leidub ratsionaalarve. **Reaalarvude piirkondade** teema on hädavajalik, et edaspidi tekstist aru saada ja ühesugust märgistust kasutada. Käsitletakse mõisteid *lõik*, *(lõpmatu) poollõik*, *(lõpmatu) vahemik*; *hulkade ühend*, *ühisosa* ja *vahe*. Tähelepanu võiks juhtida järgmisele: a) kui $A=\{x \mid -3\le x<4 \wedge x\in \mathbb{Z}\}$, siis mis lause on tõene: $-3\in A$; $4\in A$; $1{,}3\notin A$; b) $x\in \mathbb{R}$ on samaväärne $x\in(-\infty;\infty)=]-\infty;\infty[$; c) $B=]-3;4]=(-3;4]$; d) $t\in(-\infty;3)\cup[4;\infty)=\mathbb{R}\setminus[3;4)$.

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td>Hulgasümboolikat tuleb õpetada samal ajal reaalarvude piirkondadega, kuna põhikoolis hulgateooriat ei õpetata.

Reaalarvu absoluutväärtuse puhul tuleb kõiki püstitatud probleeme lahendades lähtuda alati definitsioonist ja graafilisest tõlgendusest.
$|-7| \stackrel{\text{def}}{=} -(-7) = 7$ või

$|x-2| \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} -(x-2), & x-2 < 0 \\ x-2, & x-2 \geq 0 \end{cases}$

Oluline on kindlasti käsitleda tehteid arvu 10 astmetega ning arvu viimist standardkujule, see toetab füüsikat ja keemiat.

Arvuhulkade õpetamise kõrvalt saab iseseisvaks kordamiseks lahendada protsentülesandeid.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="4">Näiteülesanded

A: Arvuhulga kujutamine arvteljel, kui hulk on antud sümbolites.

B: Kahe arvuhulga ühisosa leidmine.

C: 1. Tõestage, et kui paaritu arvu ruutu ühe võrra vähendada, siis jagub tulemus alati arvuga 8.
2. Tõestage, et kumera n-nurga diagonaalide arv väljendub valemiga $\frac{n(n-3)}{2}$.</td>
</tr>
</table>

	Arvusüsteemid (kahendsüsteemi näitel).		Teema on kohane õpilaste silmaringi avardamiseks. **Arvusüsteemide** vaatlemise alustuseks sobib ajalooline ülevaade erinevate rahvaste kasutatud arvumärkidest ning nende süsteemide ülesehitusest; positsiooniline ja mittepositsiooniline arvusüsteem. **Kahendsüsteem** ja selle seotus tänapäevaga on tihe, sest peaaegu kõik kasutavad arvuteid, mille tööpõhimõtted on seotud just selle arvusüsteemiga. Selgitatakse arvuti tööprintsiipi, mis tugineb kahendsüsteemile. Seda alateemat on otstarbekas käsitleda arvutamise loovtööna või lisada uurimistööde teemade ringi.
4) esitab arvu juure ratsionaalarvulise astendajaga astmena ja vastupidi; 5) sooritab tehteid astmete ning võrdsete juurijatega juurtega;	Arvu *n*-es juur. Astme mõiste üldistamine: täisarvulise ja ratsionaalarvulise astendajaga aste. Tehted astmete ja juurtega.	Põhikoolis on käsitletud negatiivset astendajat üksnes arvu 10 astendamisel. Õpilane peaks oskama taandada nt murde $\frac{a}{\sqrt{a}}$, $\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$, $\frac{(x-1)^3}{x-1}$, $\frac{(2+\sqrt{x})^{-2}}{(2+\sqrt{x})^{-4}}$ jne.	

6) teisendab lihtsamaid ratsionaal- ja irratsionaalavaldisi;	Ratsionaal- ja irratsionaalavaldised.	Põhikoolis õpitud tegurdamisvõtetele lisandub ainult rühmitamisvõte. Lihtsustamisülesannetes võib võrreldes põhikooliga olla rohkem tehteid ja avaldised võivad sisaldada ruutjuuri. Juuravaldiste korral tuleb pöörata tähelepanu juuravaldise määramispiirkonnale.	Kuna eelnevas kooliastmes on õpitud tehteid üks- ja hulkliikmetega ning algebraliste murdudega, siis peabki alustama sellest. Erilise tähelepanu peaks saama tegurdamine: sulgude ette toomine, algebra korrutamisvalemite kasutamine, ruutkolmliikme tegurdamine, rühmitamine. Kuupide summa ja vahe valemeid käsitletakse geomeetrilist jada õpetades. Kaksliikme kuubi valemeid käsitletakse Newtoni binoomvalemit õpetades. Avaldise lihtsustamise tulemus peab olema taandatud kujul ja võib sisaldada irratsionaalsust nimetajas. Irratsionaalavaldisi lihtsustades peaks näitama erinevaid võimalusi: teisendused juurtega, nimetajast irratsionaalsuse kaotamine, asendamine (nt $\sqrt{x}=a$, $\sqrt{y}=b$ jne). Harjutamisel tasub kasutada põhikoolist tuttavate avaldiste lihtsustamist enne lihtsustamisharjutuse keerukusastme suurendamist.

Näiteülesanded

A: 1. Lihtsustage avaldised. (T. Tõnso)

a) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}-\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

b) $\left(\dfrac{a+1}{\sqrt{a}}-2\right)\cdot\dfrac{\sqrt{a}+a}{\sqrt{a}-1}$

2. Arvutage $8^{\frac{2}{3}}+16^{\frac{5}{4}}$. (T. Tõnso)

B: Lihtsustage avaldis $\left(1-\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)\cdot\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\dfrac{a+2\sqrt{ab}}{a-b}\right)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{a}}$ ning arvutage selle väärtus, kui $a=[1{,}5-0{,}(6)]^{-2}-\left(1\dfrac{1}{6}\right)^{-1}\cdot\left(\dfrac{125}{343}\right)^{\frac{-2}{3}}+\left[\left(\dfrac{15}{25}\right)^{\frac{4}{6}}\right]^{\frac{3}{2}}$ ja

$b=\left(2\sqrt{18}-\sqrt{2}+3\sqrt{8}-3\sqrt{32}-\sqrt{50}+\sqrt{72}+1\right)^{-3}$.

Ülesanne võtab kokku eeldatavad oskused nõutud tasemel.

C: Lihtsustage avaldis $\left(\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-\left(\sqrt{a}\right)^{3}}{a+2a^{\frac{1}{2}}+1}-\sqrt{a}\right):\dfrac{1-a^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{a}}$.

7) lahendab rakendussisuga ülesandeid (sh protsentülesandeid).			Arvuhulkade õpetamise kõrvalt antakse iseseisvaks kordamiseks lahendada protsentülesandeid. Samuti saab protsentülesandeid lahendada 2. kursusel tekstülesandeid õpetades ja 14. kursusel mudelit koostades.

Lõiming

Ainesisene lõiming põhikoolis omandatud algebra teadmistega.
Avaldiste lihtsustamine aitab kaasa kõigis teistes ainetes (eriti reaalainetes) valemitest muutujate avaldamisele.
Protsentülesannete lahendamine seob keemia, füüsika, bioloogia, geograafia, majandusõpetuse jne matemaatikaga.

2. kursus

Võrrandid ja võrrandisüsteemid

Eesmärgid

Võrrandite ja võrrandisüsteemide käsitlus on eeltöö kõigi järgmiste kursuste õppimiseks. Õpilasel on õpingute jätkamiseks vaja:

1) mõista ja rakenda kursuses käsitletud matemaatilisi meetodeid ning protseduure;
2) arutleda loogiliselt ja loovalt, formaliseerida oma matemaatilisi mõttekäike;
3) saavutada allkirjeldatud õpitulemused nii, et ta omandab tüüpülesandeid lahendades õppekavas kirjeldatud oskused;
4) arendada õpitegevuse kaudu üld- ja ainepädevusi nii, et ta suudaks kasutada keerukamaid algebralisi võtteid ja meetodeid, mis võimaldaksid õppekavas kirjeldatud teadmisi ja oskusi rakendada väga heal tasemel.

Üld- ja ainepädevused:

1) suutlikkus kasutada vastava alateema meetodeid ning põhjendada oma otsuste aluseid. Selleks nõuda kirjalikus ja suulises eneseväljenduses distsiplineeritult mõistete kasutamist. Ülesandele iseseisvalt lahendustee otsimine ja selleks ideede genereerimine, paindlik mõtlemine (erinevad lahendusteed, õpitu erinevad rakendused) arendavad iseseisvalt otsustada suutvat isiksust;
2) suutlikkus arutleda loovalt ja loogiliselt, leida ülesande lahendamiseks sobivad strateegiad. Selleks kasvatada vilumust leida lahendusi peastarvutamise, kirjalike meetodite ning kasutada oleva tarkavaraga; kujundada võimekust interpreteerida tulemusi ja tõestada oma mõttekäike lähtuvalt resultaadi või esitusviisi laadist;
3) suutlikkus analüüsida ja esitada alternatiive ning oskus teha valikuid. Selleks käsitleda üht ülesannet eri vaatenurkadest ja soodustada erinevate lahendusteede otsimist; õpetada nägema põhjuste paljusust ning võimalike tagajärgede paljusust, mis soodustab õpilasel samasuguse mõtteviisi ülekandumist elulistesse kontekstidesse;
4) suutlikkus reflekteerida oma tegevust ning kriitiliselt hinnata tegevuse resultaati. Selleks suunata õpilast esitama iseendale küsimusi: mida ma teen; miks ma nii teen; milleni ma olen jõudnud ning kas tulemus on õige ja kontrollitav. Arvutuste, teisenduste ja järelduste täpsus ning reeglite järgimine arendavad enesedistsipliini.

Eelduskursused:

1) matemaatika lai I kursus;
2) põhikooli õppekavas kirjeldatud teadmised ja oskused võrrandite ning võrrandisüsteemide lahendamisest;
3) tekstülesannete funktsionaalse lugemise ja interpreteerimise oskus vähemalt rahuldaval tasemel.

Ülesannete raskusaste:

A – tüüpilisi algoritme rakendav arvutus- või teisendusülesanne;
B – ühe- või kaheetapilise suhteliselt tuntud mudeli koostamise ja rakendamise ülesanne;
C – mitmeetapilise mudeli loomise ja rakendamise ülesanne.

Õpitulemused	**Õppesisu**	**Oskuste ja teadmiste täpsustused**	**Soovitused**
Õpilane: 1) selgitab võrduse, samasuse ja võrrandi, võrrandi lahendi ning võrrandisüsteemi lahendi mõistet; 2) selgitab võimalikke võõrlahendi tekke põhjuseid ning eraldab leitud lahendite seast võõrlahendid; 3) kasutab võrrandite ja nende süsteemide lahendamisel samasusteisendusi;	Võrdus, võrrand, samasus. Võrrandite samaväärsus, samaväärsusteisendused.	Õpilasel on vaja oma selgitustega kasutada mõisteid *avaldis*, *avaldise määramispiirkond*; *võrdus*, *samasus*; *võrrand*, *võrrandi määramispiirkond*, *võrrandi lahend*. Õpilane saab aru, et leidub võrrandeid, millel lahendid puuduvad; mõnel võrrandil on neid lõplik arv, teisel võib lahendeid olla kuitahes palju; ühed lahendid sobivad, teised mitte. Tähelepanu tuleb pöörata võõrlahendi mõistele. Võrrandi $\frac{1}{x+x^2}-\frac{1}{x}=0$ lahendamisel saame ainsaks lahendiks $x = 0$, kuid see on võõrlahend; tegelikult võrrandil lahend puudub.	Mõistete korrektset kasutamist õpetatakse ning harjutatakse kogu kursuse vältel. Õpilane peab suutma suuliselt põhjendada, mille alusel ta otsustab võõrlahendi olemasolu või lahendite puudumise.

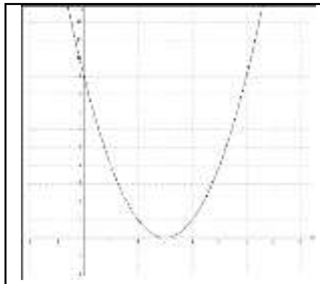
		Edaspidi tekstülesandeid lahendades peab õpilane elimineerima lahendid, mis ei sobi ülesande tingimustega (annavad absurdse tulemuse).	
4) lahendab ühe tundmatuga lineaar-, ruut-, murd- ja lihtsamaid juurvõrrandeid ning nendeks taanduvaid võrrandeid;	Lineaar-, ruut-, murd- ja juurvõrrandid ning nendeks taanduvad võrrandid.	Võrrandeid lahendades on vaja pöörata tähelepanu võrrandi ja selle lahendite graafilisele interpretatsioonile. Ruutvõrrandit lahendades tuleb esitada irratsionaalarvulised lahendid täpselt, nt $x^2 - 2x - 2 = 0$; lahendid $x_1 = 1 - \sqrt{3};\ x_2 = 1 + \sqrt{3}$. Väga hea taseme saavutamiseks pööratakse tähelepanu kõrgema astme võrranditele, mis taanduvad ruutvõrrandi lahendamisele tegurdamisega või muutuja vahetusega. Ka üht juurt sisaldava võrrandi puhul peab fikseerima määramispiirkonna, sest võib tekkida võõrlahend.	Õpilaste võrrandite lahendamise vilumusaste kasvatatakse tasemele, kus õpilane lahendab vabalt peast mittetäielikke ja täisarvuliste lahenditega taandatud ruutvõrrandeid ning võrrandeid, mida on eespool nimetatud, või lineaarvõrrandeid mingi avaldise suhtes. See vilumus tagab stabiilsema aluse kõigis järgmistes kursustes. Murdvõrrandi lahendamise puhul rakenduvad eespool õpitust tehted algebraliste avaldistega. Murdvõrrandi lahendamisel antakse võrrandile kuju $\frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$ ning nõutakse õpilastelt suulist põhjendust selle kuju põhjal tehtavate sammude kohta. Õpilastele tasub anda harjutamiseks tekstülesannetele tüüpilisi murdvõrrandeid, kui tekstülesandeid on plaanis lahendada murdvõrranditega, mitte mõnda muud tehnikat kasutades.

		Juurvõrrandi puhul piirdutakse kuni kaht juurt sisaldava võrrandiga. Kui antud võrrandit on teisendatud nii, et iga järgmine võrrand on ekvivalentne (samaväärne) eelmisega, siis ei ole kontroll võrrandi koostisosa ning selle võib jätta tegemata. Õpilasel on lihtsam meelde jätta, et murd- ja juurvõrrandite puhul peab tegema kontrolli.	Parameetrit sisaldavaid võrrandeid, mille lahendamise tehniline keerukus ei ületa võrrandite lahendamise põhivõtet, saab kasutada võrrandite lahendamise väga hea taseme saavutamiseks. Näiteks: millise parameetri *a* korral võrrandil $2(a-2x)=a\,x+3$ lahend puudub? Võrrandeid graafiliselt lahendades arendatakse tarkvaraliste lahenduste kasutamise ning graafikute lugemise oskust. Võrrandeid arvutis lahendades peab arvestama äärmiselt mitmekesise tarkvara olemasolu ning julgustama õpilasi nende hulgast valikut tegema, nii et kasutamine on kiire, mugav ja ilma liigsete kasutajaliidese keerukusteta. Tarkvaralahendusi võib kasutada pärast lihtsamate ja keskmise raskusastmega võrrandite ladusa lahendamise oskuse saavutamist.

Näiteülesanded

A: 1. Lahendage peast järgmised võrrandid: $x^2+2x-35=0$, $(3x-1)(x+2)=0$, $5x^2=40x$. (T. Tõnso, A. Veelmaa)

2. Joonisel on antud võrrandi $(3-x)^2=9$ üks võimalikest geomeetrilistest lahendustest. Osutage lahendite asukohale joonisel.
(K. Kaldmäe, A. Kontson, K. Matiisen, E. Pais)

<table>
<tr><td colspan="4">

B: Lahendage võrrandid $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$; $\sqrt{2x-4} - \sqrt{x-5} = 1$; $\sqrt{1 + x\sqrt{x^2+24}} = x + 1$. (A. Talts)

C: 1. Lahendage võrrandid $5 - 3\left(x - 2\left(x - 2(x-2)\right)\right) = 2$; $(x+1)\sqrt{x^2 - 5x + 5} = x + 1$. (K. Kaldmäe, A. Kontson, K. Matiisen, E. Pais)
2. Võrrandi $kx^2 - 6x + k^2 - 1 = 0$ lahendid on võrdsed. Leidke need lahendid. (T. Tõnso, A. Veelmaa)</td></tr>
<tr><td>5) lahendab lihtsamaid üht absoluutväärtust sisaldavaid võrrandeid;</td><td>Üht absoluutväärtust sisaldav võrrand.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4">**Näiteülesanded**

A. Lahendage peast võrrandid $|x| = 5, |x| = -3$; $|2 - x| = 2$. (T. Tõnso)

B: Lahendage võrrandid $\left|\frac{x+1}{x-1}\right| = 1$; $|x^2 + x| + 3x - 5 = 0$; $|-x + 2| = 2x + 1$.

C: Lahendage võrrandid $\sqrt{x-2} + |x - 5| = 3$; $|x - 1| - |x - 2| = 1$. (T. Tõnso)</td></tr>
<tr><td>6) lahendab võrrandisüsteeme;
7) kasutab arvutialgebra programmi determinante arvutades</td><td>Võrrandisüsteemid, kus vähemalt üks võrranditest on lineaarvõrrand
Kahe- ja kolmerealine determinant.</td><td>Võrrandisüsteeme, kus on kaks ruutvõrrandit ja mis lahenduvad liitmisvõttega, on vaja kasutada 5. kursusel joonte vastastikust asendit uurides väga heal tasemel.</td><td>Küllalt otstarbekas on alustada süsteemide lahendamise õpetamist kahe tundmatuga lineaarvõrrandite süsteemide lahendamisega erineval viisil: liitmisvõtet, asendusvõtet, graafilist võtet ja</td></tr>
</table>

ning võrrandeid ja võrrandisüsteeme lahendades.		Etteruttavalt võiks lahendada ka võrrandisüsteeme, mida hiljem kasutame joonte lõikepunktide leidmiseks (nt integraaliga pindala leidmisel).	determinante kasutades. Lihtne on seejärel üle minna ülesannetele, kus on kolm tundmatut ja tekib kolme tundmatuga lineaarvõrrandite süsteem. Võrrandisüsteeme lahendatakse erinevate lahendusvõtetega: liitmis-/lahutamisvõtet eelistatakse asendusvõttele, Viète'i teoreemi eelistatakse asendusvõttele, liitmis-/lahutamis- ja asendusvõtte kombineerimist eelistatakse süsteemide lahendamisele determinantide kaudu. Võimaluse korral vaadatakse süsteeme, mida saab lahendad nn korrutamis- või jagamisvõttega. Tarkvaralahendusi võib kasutada pärast lihtsamate ja keskmise raskusastmega süsteemide ladusa lahendamise oskuse saavutamist.

Näiteülesanded

A: Lahendage võrrandisüsteem $\begin{cases} x^2 - y = 1 \\ x - y = -5 \end{cases}$.

B: Lahendage võrrandisüsteemid $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 63 \\ x - y = -3 \end{cases}$; $\begin{cases} x + y = 7 \\ y = \frac{6}{x} \end{cases}$; $\begin{cases} 1 - 2x = y - x \\ \frac{2x-y}{3} = 1 - \frac{x+y}{2} \end{cases}$; $\begin{cases} x^2 - y^2 = 15 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$.

<table>
<tr><td colspan="4">

C: 1. Lahendage võrrandisüsteemid $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{7}{12}\\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{12}\end{cases}$; $\begin{cases}x^2+y=12\\ 2x^2-y^2=5\end{cases}$.

2. Antud on võrrandisüsteem $\begin{cases}ax-y-4z=3\\ 2x+y+3z=1\\ 3x-y-z=4\end{cases}$. Leidke parameetri a need väärtused, mille korral võrrandisüsteemil on täpselt üks lahend (või lahend puudub või lahendeid on lõpmatult palju).

Õpilane kasutab arvutialgebra programmi determinante arvutades ning võrrandisüsteemi lahendades. Mõne dünaamilise graafikaprogrammiga loob ta (nt liuguriga) süsteemi graafilise esituse ning interpreteerib tekkivat kuva ülesande esituse järgi.

</td></tr>
<tr><td>8) lahendab tekstülesandeid võrrandite (võrrandisüsteemide) järgi;</td><td>Tekstülesanded.</td><td>Tähelepanu pööratakse funktsionaalsele lugemisoskusele. Tekstülesannete lahendamiseks kasutatakse erinevaid mudeleid.</td><td>Tekstülesannete lahendamise oskust saab arendada edasi 14. kursusel.</td></tr>
<tr><td colspan="4">

Näiteülesanded

A: 1. Põhikooli kursusest tuttavad lineaarsüsteemiks või ruutvõrrandiks taanduvate ülesannete tüübid.

2. Kui esimest arvu vähendada 4 korda ja teist arvu vähendada 10 võrra, siis on nende arvude summa 8. Kui esimest arvu suurendada 2 võrra ja teist suurendada 4 korda, siis on teise ja esimese arvu vahe 22. Leidke need arvud.

B: Maantee asfalteerimisel kasutati kahte erineva võimsusega asfaldilaoturit. Mõlema masinaga laotati 10 km asfalti, kusjuures teine masin töötas ühe päeva vähem kui esimene masin. Mitu kilomeetrit teed asfalteeriti mõlema laoturiga päevas, kui samal ajal töötades asfalteerisid mõlemad masinad ühe päevaga kokku 4,5 km teed. (A. Talts)

C: Kahele töölisele anti teatud töö. Kui esimene oli töötanud 7 tundi ja teine 4 tundi, selgus, et kokku oli tehtud $\frac{5}{9}$ tööst. Nüüd töötasid nad koos veel 4 tundi ja kogu tööst jäi pärast seda teha $\frac{1}{18}$. Mitme tunniga oleks selle töö teinud kumbki tööline üksi töötades?

</td></tr>
</table>

Lõiming

Lõiming on teiste ainetega ülesannete tekstide kaudu. Oluline kursus kõigile ainetele, kus kasutatakse võrrandite koostamist ja lahendamist.

3. kursus

Võrratused. Trigonomeetria I

Eesmärgid:

1) saavutada allkirjeldatud õpitulemused nii, et õpilane omandab tüüpülesandeid ning kergemaid mitterutiinseid ülesandeid lahendades õppekavas kirjeldatud oskused;
2) arendada õpitegevuse kaudu üld- ja ainepädevusi nii, et õpilane suudaks lahendada keerukamaid ülesandeid, mis võimaldaksid õppekavas kirjeldatud teadmisi ja oskusi rakendada väga heal tasemel.

Üld- ja ainepädevused:

1) suutlikkus kasutada vastavale alateemale omast keelt, sümboleid ning meetodeid. Selleks nõuda kirjalikus ja suulises eneseväljenduses distsiplineeritult mõistete ning keelesümboolika kasutamist;
2) suutlikkus arutleda loovalt ja loogiliselt ning leida ülesande lahendamiseks sobivad strateegiad. Selleks käsitleda ülesannete lahendamise üldisi strateegiaid;
3) suutlikkus põhjendada ja tõestada oma mõttekäike, kusjuures tõestada mitte niivõrd väite tõesuse näitamiseks, kuivõrd aitamaks luua üksikteadmistes süsteemi;
4) suutlikkus analüüsida ja esitada alternatiive ning oskus teha valikuid. Selleks käsitleda üht ülesannet eri vaatenurkadest ja soodustada erinevate lahendusteede otsimist;
5) suutlikkus reflekteerida oma tegevust ning kriitiliselt hinnata tegevuse resultaati. Selleks suunata õpilast esitama iseendale küsimusi: mida ma teen, miks ma nii teen, milleni ma olen jõudnud ning kas tulemus on õige ja kontrollitav.

Eelduskursused: matemaatika lai

I kursus (arvuhulgad, avaldise absoluutväärtus, reaalarvude piirkonnad arvteljel, avaldiste lihtsustamine);
II kursus (võrrandite lahendamine, tekstülesanded).

Ülesannete raskusaste:

A – tüüpilisi algoritme rakendav arvutus- või teisendusülesanne;
B – ühe- või kaheetapilise suhteliselt tuntud mudeli koostamise ja rakendamise ülesanne;
C – mitmeetapilise mudeli loomise ja rakendamise ülesanne.

Õpitulemused	**Õppesisu**	**Oskuste ja teadmiste täpsustused**	**Soovitused**
Õpilane: 1) selgitab võrratuse omadusi ning võrratuse lahendihulga mõistet; 2) selgitab võrratuste lahendamisel rakendatavaid samasusteisendusi;	Võrratuse mõiste ja omadused.	Oluline on, et õpilane oskab tekstiga antud võrratusi kirja panna, teab, mida tähendavad mõisted *mittenegatiivne*, *mittepositiivne*, *negatiivne*, *positiivne* jms. Tähtis on ka järelduse teadmine, et võrratuse liikmeid võib viia ühelt poolelt teisele, muutes üleviidava võrratuse märgi vastupidiseks. Vaja on teada ahelvõrratust ja selle tähendust.	Tugevamatele õpilastele võib soovitada TÜ Teaduskooli õppematerjale võrratuste kohta (koostanud Hilja Afanasjeva ja Raili Vilt) aadressil www.teaduskool.ut.ee. Kursuse materjali omandamiseks on vaja lihtsustada avaldisi ning lahendada võrrandeid. Samuti peab tundma arvuhulki ja oskama märkida arvteljel reaalarvude piirkondi. Kuna põhikoolis enam võrratusi ei käsitleta, siis peab siin võrratuste lahendamise hästi selgeks saama. Võrratuste lahendamise oskust on vaja funktsioone käsitledes 7.–10. kursuses (nt määramispiirkonna, positiivsus- ja negatiivsuspiirkonna, kasvamis- ja kahanemisvahemike leidmisel jne). Hästi on vaja selgeks saada võrratuse omadused ning samasusteisendused, eriti võrratuse poolte korrutamine ja jagamine negatiivse arvuga. Hea oleks võrrelda võrrandi ja võrratuse lahendamist ning tuua esile erinevused.
3) lahendab lineaar-, ruut- ja murdvõrratusi;	Lineaarvõrratused. Ruutvõrratused. Lihtsamad murdvõrratused.	Enne tuleb võrratuses olevad avaldised lihtsustada. Lineaarvõrratuste puhul peab lahendama ka murdavaldisi	Ruutvõrratuste puhul võiks arutleda, kuidas lahendada, nt $(2x-1)^2 > 9$, $(2x-1)^2 < -9$, $(2x-1)(x+3) \geq 0$. Õpilased peavad mõtlema ja

4) oskab kasutada võrratuste lahendamisel intervallmeetodit;	Intervallmeetod.	sisaldavaid võrratusi, kus on soovitatav korrutada võrratuse pooled läbi ühise nimetajaga. Peab teadma algebra põhivalemeid (summa ja vahe ruut, ruutude vahe). Ruutvõrratuse lahendamiseks tuleb esmalt lahendada vastav ruutvõrrand, skitseerida joonis ja kirjutada jooniselt lahendihulk. Murdvõrratuse puhul peab meeles pidama, et võrratuse pooli ei tohi läbi korrutada ühise nimetajaga ega mingi muu avaldisega. Tuleb selgeks teha, mille poolest erineb murdvõrrandi ja murdvõrratuse lahendamine.	analüüsima, lahendama ülesannet mitmel viisil ning valima ratsionaalseima lahenduse. Murdvõrratust võib lahendada intervallmeetodiga, kuid mõistlik on lahendada teatud murdvõrratusi ka võrratussüsteemi järgi ning arutluse teel, nt kui lugeja või nimetaja on reaalarv või mittenegatiivne (mittepositiivne, negatiivne, positiivne), nt $\frac{1-x}{2}>0$ asemele saame $1-x>0$; $\frac{2x-4}{-5}\geq 0$ asemele saame $2x-4\leq 0$; $\frac{x^2+1}{2-x}<0$ asemele saame $2-x<0$ jne. Soovitatav on lahendada kõrvuti murdvõrrandit ja murdvõrratust, nt $\frac{(x-1)^2}{x+3}=0$ ja $\frac{(x-1)^2}{x+3}\succ 0$, ning arutleda, mille poolest erineb nende lahendamine ning milles seisneb lahendi (lahendihulga) erinevus. Lahendamiseks võib anda ka tekstiga ülesandeid, kus võrratuse peab ise koostama. Samuti tuleks lahendada tekstülesandeid ning lasta õpilastelgi elulisi tekstülesandeid koostada (nt vitamiinide või mineraalainete vajadusest lähtudes). Võrratuste lahendusi võib kontrollida IKT vahendeid kasutades (programmid Wiris, GeoGebra, Wolframalpha jm). Samuti saab IKT

			vahendeid kasutades selgitada võrratuste geomeetrilist tähendust. Soovitatav on lahendada võrratusi graafiliselt või lugeda võrratuse lahendid ette graafikult.

Näiteülesanded

A: 1. Võrratused kujul $ax+b>0$; $ax^2+bx+b>0$; $\frac{A}{B}>0$ (*A* ja *B* on lihtsustatud algebralised avaldised).

2. Milliste muutuja x väärtuste korral on avaldise $2x-5$ väärtus positiivne; väiksem kui –7; 1 ja 6 vahel; mitte suurem kui 3; mitte väiksem kui 7 jne?

B: 1. $\frac{1-x}{2}-2>-3x$; $(2y-1)^2-4y^2\geq 3$; $\frac{3x-1}{2x+5}<1$; $(2x+3)(3x-2)^2(3x+9)<0$, $-3(x-13)(x+24)>0$; $\frac{4x^2-12x+9}{x+5}\leq 0$

2. Joonisel on antud funktsioonide $y=x-4$ ja $y=5-2x$ graafikud. Lahendage joonise järgi võrratus $x-4<5-2x$ ja viirutage lahendipiirkond joonisel.

3. Joonisel on antud funktsioonide $y=x-1$ ja $y=x^2-3$ graafikud. Lahendage joonise järgi võrratus $x^2-3\geq x-1$ ja viirutage lahendipiirkond joonisel.

4. Leidke argumendi x väärtused, mille korral avaldise $1+\frac{6}{x}$ väärtused on väiksemad kui avaldise $\frac{2}{x+2}$ väärtused.

Hiljem (funktsioonide kursust käsitledes või korrates) saab selle ülesande sõnastada näiteks järgmiselt:

Leidke argumendi x väärtused, mille korral funktsiooni $f(x)=1+\frac{6}{x}$ väärtused on väiksemad kui funktsiooni $g(x)=\frac{2}{x+2}$ väärtused.

C: 1. Ristkülikukujulisele maatükile mõõtmetega 15 m ja 20 m tahetakse kõigisse äärtesse külvata võrdse laiusega mururiba. Kui lai võib see riba olla, et muru ei võtaks enda alla üle 25% esialgsest maatükist? (L. Lepmann, T. Lepmann, K. Velsker)

2. Lahendage võrratused $(x-5)\sqrt{x-2}\geq 0$; $\frac{x^4+2x^3-x-2}{3x^2}<0$.

3. Milliste x väärtuste korral leidub avaldisel $\sqrt{3x^2-x-4}$ väärtus?

5) selgitab võrratussüsteemi lahendihulga mõistet; 6) selgitab võrratussüsteemide lahendamise põhimõtet; 7) lahendab **lihtsamaid võrratussüsteeme;**	Võrratussüsteemid.	Võrratussüsteemi lahendades leitakse eraldi iga võrratuse lahendid ja alles seejärel nende ühisosa, mis on süsteemi lahend. Ahelvõrratuse lahendamine võrratussüsteemi järgi.	Võrratussüsteeme lahendades saab kinnistada arvuhulkade tundmist. Võrratussüsteemide raskusastet määrates tuleks lähtuda sellest, mis süsteeme peab hiljem funktsioone uurides lahendama. Kui süsteem sisaldab ka absoluutväärtusega võrratust, mis lahendub definitsioonile tuginedes, siis saab selle kaudu veenduda õpilaste teemast sisulises arusaamises. Kui võrratuste ja võrratussüsteemide lahendamine on omandatud, saab tutvuda võimalustega, kuidas kasutada lahendamisel tarkvaralahendusi. Neid vahendeid kasutades saab selgitada võrratussüsteemide geomeetrilist tähendust. Võrratuste tõestamine sobib tugevamatele õpilastele. Absoluutväärtust sisaldav võrratus, mille lahendus viib võrratussüsteemi lahendamisele, sobib samuti tugevamatele õpilastele.

Näiteülesanded

A: Leidke võrratuste süsteemi $\begin{cases} 6x+16 \ge 4 \\ 2x+4 > 4x-4 \end{cases}$ kõik naturaalarvulised lahendid.

B: 1. Lahendage võrratussüsteemid $\begin{cases} -5x^2+10x \ge 0 \\ \frac{2x+1}{3}-4 < \frac{1}{2}-\frac{12x+2}{4} \end{cases}$; $\begin{cases} 8x^2-24x > 0 \\ 2(x-1)-3(3x+2) > 6 \end{cases}$.

2. Lahendage võrratus $\frac{2x-1}{3-x} > 2$ ja leidke võrratuse suurim täisarvuline lahend.

C: 1. Leidke võrratussüsteemi $\begin{cases} |x| > 1 \\ x^2+3x < 3(x+4)-3 \\ x \ge -2 \end{cases}$ kõik naturaalarvulised lahendid.

2. Kavatsetakse rajada ristkülikukujuline aed, millest eraldatakse ruudukujuline sõstrapõõsastealune maatükk. Järelejäänud aiaosale rajatakse 10 m pikkused ruudu küljega risti olevad maasikapeenrad. Mis laiusega peab maatükk olema, et selle kogupindala oleks väiksem kui 96 m^2, aga suurem kui 75 m^2? (L. Lepmann, T. Lepmann, K. Velsker)

8) leiab taskuarvutil teravnurga trigonomeetriliste funktsioonide väärtused ning nende väärtuste järgi nurga suuruse; 9) lahendab täisnurkse kolmnurga;	Teravnurga siinus, koosinus ja tangens.	Soovitatav oleks tuletada $30°$, $60°$, $45°$ nurga siinuse, koosinuse ja tangensi väärtus, kasutades võrdkülgset kolmnurka ning täisnurkset võrdhaarset kolmnurka. Täisnurkse kolmnurga lahendamine tähendab selle külgede ja teravnurkade leidmist. Täisnurkse kolmnurga kaudu peab oskama leida näiteks võrdhaarse kolmnurga, võrdkülgse kolmnurga, rombi ja trapetsi puuduvaid elemente.	Põhikoolis on õpitud ainult ühtepidi: teravnurga siinuse, koosinuse ja tangensi leidmist. Pöördtehte tegemine (nurga leidmine) vajab korralikku selgitamist ning harjutamist taskuarvutil (ümardamisel 4 kümnendkohta). Täisnurkset kolmnurka on põhikoolis lahendatud, kuid seda teemat on kindlasti vaja korrata ja kinnistada. Oluline on teatud nurkade ($30°$, $60°$, $45°$) siinuse, koosinuse ja tangensi teadmine peast. Need on soovitatav tuletada ja hakata kohe kasutama näiteks täisnurkse kolmnurga lahendamisel jm. Trigonomeetriliste funktsioonide järgi saab tõestada täisnurkse kolmnurga kõrguse teoreemi ja Eukleidese teoreemi, kui aeg seda võimaldab.

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>Õuesõppetundides, matkal või mõnel õppekäigul saab teha mõõtmisi looduses ja kaudset mõõtmist.

Soovitatav on lahendada nn elulisi ja praktilisi ülesandeid ning lasta õpilastel ülesandeid koostada (teatud tingimused võib ette anda, nt koostada eluline ülesanne, mille lahendamisel tuleks kasutada Pythagorase teoreemi, teravnurga trigonomeetrilisi funktsioone vms).</td></tr>
<tr><td colspan="4">Näiteülesanded

A: 1. Lahendage täisnurkne kolmnurk, kui selle üks nurk on $60°$ ja selle vastaskaatet on 5 cm.
2. Lahendage täisnurkne kolmnurk, kui selle üks kaatet on 5 cm ja hüpotenuus 17 cm.

B: 1. Üle jõe kavatsetakse ehitada sild BC. Arvutage silla pikkus, kui baas $AB = 80$ m ja see on risti tulevase sillaga BC ning nurk CAB on $74°$. (L. Lepmann, T. Lepmann, K. Velsker)

2. Võrdhaarse kolmnurga alus on 8 cm ja aluse lähisnurgad $71°34'$. Leidke kolmnurga pindala.

C: Õpilased mõõtsid puu kõrgust DC jõe teisel kaldal ja jõe laiust BD. Selleks märkisid nad BD sihil baasi AB = 30 m ning leidsid, et punktist A paistab puu $13°$ nurga all ja punktist B $30°$ nurga all. Tehke joonis ning leidke jõe laius ja puu kõrgus. (L. Lepmann, T. Lepmann, K. Velsker)</td></tr>
<tr><td>10) kasutab täiendusnurga trigonomeetrilisi funktsioone;</td><td>Täiendusnurga trigonomeetrilised funktsioonid.</td><td>Täiendusnurga valemid on soovitatav tuletada täisnurksest kolmnurgast.</td><td></td></tr>
<tr><td>11) kasutab lihtsustamisülesannetes trigonomeetria põhiseoseid.</td><td>Trigonomeetrilised põhiseosed täisnurkses kolmnurgas</td><td>Põhiseosed $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$</td><td>Lihtsustamisülesanded trigonomeetria põhiseoste kohta ei tohi olla keerulised, kuid õpilased peavad ära tundma ka seoste teisendusi, nt $1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$.</td></tr>
</table>

		on soovitatav tõestada või tuletada täisnurkses kolmnurgas.	Tähtis on, et seoste kasutamine lihtsustamisülesannetes saaks selgeks, siis saab hiljem kergesti üldistada neid mis tahes nurkadele.

Näiteülesanded

A: 1. Leidke avaldis, mille väärtus ei ole võrdne ühega. Selgitage vastust, näidates, miks ülejäänud avaldiste väärtused võrduvad ühega.

a) $2-\sin^2 40^\circ - \cos^2 40^\circ$
b) $\cos^2 35^\circ + \sin^2 35^\circ$
c) $\cos^2 35^\circ + \cos^2 55^\circ$
d) $\sin 15^\circ + \cos 15^\circ$

2. Arvutage avaldise $3\tan 45^\circ - \sqrt{3}\cot 60^\circ + 4\sin 30^\circ$ täpne väärtus.

B: 1. Tõestage samasus $\frac{1}{\tan^2\alpha} + \frac{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}$.

2. Leidke avaldise $\tan^2\alpha - \sin\frac{\alpha}{2} + \cos\alpha - 2\sin\alpha$ täpne väärtus, kui $\alpha = 60^\circ$.

3. Lihtsustage avaldis $(1+\cos\beta)(1-\cos\beta) : \tan^2\beta + \cos^2(90^\circ - \beta)$.

C: Lihtsustage avaldis $1-\cos^4\alpha - \sin^2\alpha\ \cos^2\alpha - \cos^2\alpha$. (L. Lepmann, T. Lepmann, K. Velsker)

Ainesisene lõiming

Selles kursuses kasutatakse palju põhikoolis õpitut. See võimaldab õpilaste teadmisi ühtlustada ja õppimises tekkinud lünki täita. Samas on selle kursuse materjal väga oluline järgmiste kursuste õppimisel. III kursus on eelduskursus kõigile järgmistele kursustele.

Lõiming teiste ainetega

Bioloogia, inimeseõpetus. Toitumistabelid, kalorite arv toiduainetes, vitamiinide ja mineraalainete vajadus (vähemalt, mitte rohkem kui, …).

Geograafia. Mõõtmine looduses, kaudne mõõtmine, võrdlemine.

Läbivad teemad kursuse vältel

Elukestev õpe ja karjäär. Abstraktse ja loogilise mõtlemise areng.
Kultuuriline identiteet. Matemaatika ajalugu, Pythagoras ja Eukleides.
Kodanikualgatus ja ettevõtlikkus. Õuesõppetunnid, rühmatöö ja paaristöö, koostööoskuste arendamine.
Tervis ja ohutus. Õppekäikude ja õuesõppetundide turvalisus, tervislik toitumine (toiduratsioon, kalorsus, vitamiinid ja mineraalained).
Väärtus ja kõlblus. Süstemaatilisuse, püsivuse, täpsuse, korrektsuse ja kohusetunde arendamine.

4. kursus

Trigonomeetria II

Eesmärgid:
1) saavutada allkirjeldatud õpitulemused nii, et õpilane omandab tüüpülesandeid lahendades õppekavas kirjeldatud oskused;
2) arendada õpitegevuse kaudu üld- ja ainepädevusi nii, et õpilase teadmised talletuksid seoste otsimise ja probleemide lahendamise resultaadina, mis võimaldaksid õppekavas kirjeldatud teadmisi ja oskusi rakendada väga heal tasemel.

Üld- ja ainepädevused:
1) suutlikkus olla järjekindel ning tegevuses eesmärgipärane. Selleks järgida põhimõtet, et trigonomeetrilised teisendused on palju enamat kui lihtsalt reeglite äraõppimine ja tüüpülesannete lahendamise oskus; läbinägelikkus ja õpipädevusedki arenevad leiutades, kuidas neid pikki avaldisi optimaalsemalt lihtsustada;
2) suutlikkus funktsionaalselt lugeda ning loetu järgi adekvaatselt reageerida. Selleks kasutada õpiülesannete formuleerimisel verbe võimalikult mitmekesiselt (uurima, avastama, järeldama, formuleerima, konstrueerima, seoseid otsima, lahendama, selgitama, ennustama, kirjeldama) ning jälgida nõudlikult verbi määratud tegevuse ja õpilase tegevuse sisulist vastavust;
3) suutlikkus kasutada vastavale alateemale omast keelt, sümboleid ning meetodeid. Selleks nõuda kirjalikus ja suulises eneseväljenduses distsiplineeritult mõistete ning keelesümboolika kasutamist;
4) suutlikkus arutleda loovalt ja loogiliselt, leida ülesande lahendamiseks sobivad strateegiad. Selleks kasutada valemite tuletamiseks ning meeldejätmiseks erinevaid strateegiaid ja julgustada õpilasi enda leitud lahendusi omavahel jagama ning kriitiliselt analüüsima;

5) suutlikkus analüüsida ja esitada alternatiive ning oskus teha valikuid. Selleks õpetada teisendus- ja lihtsustamisülesannetes õpilasi jagama ülesannet osa- või alaülesanneteks ehk õpetada nägema teisendusetappe. Osa alateemade õpetamisel asetada aktsente ümber ning ülesannete lahendamisega võrdselt väärtustada loogilist arutlemist ja seoste iseseisvat tuletamist;
6) suutlikkus reflekteerida oma tegevust ning kriitiliselt hinnata tegevuse resultaati. Selleks suunata õpilast esitama iseendale küsimusi: mida ma teen; miks ma nii teen; milleni ma olen jõudnud ning kas tulemus on õige ja kontrollitav.

Eelduskursused: matemaatika laia III kursuse osa trigonomeetria I.

Ülesannete raskusaste:

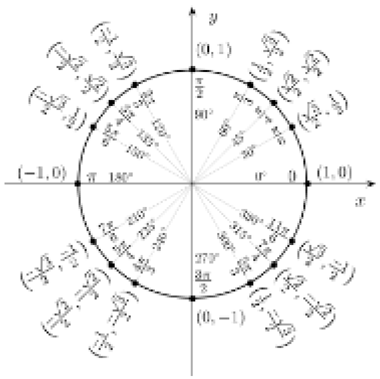
A – tüüpilisi algoritme rakendav arvutus- või teisendusülesanne;
B – ühe- või kaheetapilise suhteliselt tuntud mudeli koostamise ja rakendamise ülesanne;
C – mitmeetapilise mudeli loomise ja rakendamise ülesanne.

Õpitulemused	**Õppesisu**	**Oskuste ja teadmiste täpsustused**	**Soovitused**
Õpilane: 1) teisendab kraadimõõdu radiaanmõõduks ja vastupidi;	Nurga mõiste üldistamine. Nurga kraadi- ja radiaanmõõt.		Oluline on meelde jätta, et $\pi\, rad = 180°$ ning sellest lähtuvalt saab teisendada kraadimõõtu radiaanmõõduks ja vastupidi.
2) arvutab ringjoone kaare kui ringjoone osa pikkuse ning ringi sektori kui ringi osa pindala;	Ringjoone kaare pikkus, ringi sektori pindala.	Ringjoone kaare pikkuse ja sektori pindala valemit ei pea peast teadma, neid tuleb vajaduse korral tuletada.	

Näiteülesanded

A: Raudtee kõverusraadius on 456 m. Leidke, kui pikk on kurv, kui vastav kesknurk on 1,31 rad. (T. Tõnso, A. Veelmaa)

B: Leidke sektori kaare pikkus, kui sektori nurk on $18°$ ja sektori pindala on 31,4 cm^2. (L. Lepmann, T. Lepmann, K. Velsker)

C: Sektor koosneb segmendist ja kolmnurgast, mille kaks külge on sektori raadiused ning kolmas külg on kõõl. Koostage valem segmendi pindala arvutamiseks, kui sektori nurk on $\frac{\pi}{3}$ rad ja raadius on *r*. (L. Lepmann, T. Lepmann, K. Velsker)			
3) defineerib mis tahes nurga siinuse, koosinuse ja tangensi; tuletab siinuse, koosinuse ja tangensi vahelisi seoseid; 4) tuletab ja teab mõningate nurkade ($0°$, $30°$, $45°$, $60°$, $90°$, $180°$, $270°$, $360°$) siinuse, koosinuse ja tangensi täpseid väärtusi; 5) leiab taskuarvutil trigonomeetriliste funktsioonide väärtused ning nende väärtuste järgi nurga suuruse;	Mis tahes nurga trigonomeetrilised funktsioonid. Nurkade $0°$, $30°$, $45°$, $60°$, $90°$, $180°$, $270°$, $360°$ siinuse, koosinuse ja tangensi täpsed väärtused.	Õpilane kasutab nii kraadi- kui ka radiaanmõõtu. Nurkade $0°$, $90°$, $180°$, $270°$, $360°$ siinuse, koosinuse ja tangensi täpsed väärtused leitakse trigonomeetriliste funktsioonide üldistatud definitsioonide järgi. Kui eelmises kursuses ei tuletatud $30°$, $45°$ ja $60°$ nurga jaoks trigonomeetriliste funktsioonide väärtusi, siis tuleb seda teha nüüd. Võiks leida ka nt $135°$, $225°$, $315°$ nurga siinuse, koosinuse ja tangensi.	Trigonomeetriliste funktsioonide väärtused kantakse ühikringile. Järgmisel Wikipediast pärit väärtuste joonisel jälgitakse ühikringjoone ja nurga lõpphaarade lõikepunktide *x*- ja *y*-koordinaate – kuidas need on seotud nurga siinuse ja koosinusega?  Tehnoloogiapädevuse kasvatamiseks võiks vaadelda dünaamilise geomeetria vahenditega loodud animeeritud tõestust ning panna selle põhjal kirja tõestus või järeldused.
Näiteülesanded			

A: 1. Leidke $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ja $\tan\alpha$, kui nurga α lõpphaaral asub punkt $A(-1;\,-3)$.

2. $\sin\alpha = 0{,}7$. Leidke $\cos\alpha$ ja $\tan\alpha$ täpsed väärtused, kui α on teravnurk.

B. Arvutage avaldise $\frac{8}{\sqrt{3}}\cos\frac{\pi}{6} - 7\sin\pi + \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4} + 2\cos\frac{3\pi}{2}$ täpne väärtus.

C: 1. Trans-Alaska torujuhtme ehitajad kasutasid soojustusplaate, et hoida eelsoojendatud toornafta temperatuuri, kui toru asus külmunud pinnases. Soojustuse disainimisel tuli arvestada temperatuuri kõikumist kogu aasta jooksul. Kui Alaska õhutemperatuurid olid mitme aasta kohta kogutud, siis selgus, et neid on hea lahendada siinusfunktsiooniga $f(x) = 37\sin\left(\frac{2\pi}{365}\cdot(x-101)\right) + 25$, kus f on temperatuur Fahrenheitides ning x on päevade arv alates aasta algusest. Selgitage arvulisi konstante. Teisendage temperatuur Celsiuse süsteemi. (H. Jukk)

2. Missuguste m väärtuste korral on trigonomeetrilise funktsiooni väärtus arvutatav?

a) $\sin\alpha = \frac{4m-5}{m+3}$; b) $\cos\alpha = \frac{-m}{m+1}$ (K. Kaldmäe, A. Kontson, K. Matiisen, E. Pais)

6) rakendab taandamisvalemeid, negatiivse ja täispöördest suurema nurga valemeid;	Taandamisvalemid. Negatiivse ja täispöördest suurema nurga trigonomeetrilised funktsioonid.		Tuletatakse taandamisvalemid vähemalt ühes koordinaatveerandis (nt II veerandis). Õpilane peab trigonomeetriliste avaldiste lihtsustamise kontrollimiseks oskama kasutada oma taskuarvutit. Täispöördeid võib nurgale nii liita kui ka nurgast lahutada!

Näiteülesanded

A: 1. $\sin\alpha = -0{,}7$. Leidke $\cos\alpha$ ja $\tan\alpha$ täpsed väärtused, kui α on teise või kolmanda veerandi nurk.

<table>
<tr><td colspan="4">2. Arvutage avaldise täpne väärtus. (K. Kaldmäe, A. Kontson, K. Matiisen, E. Pais)
a) $\sin 405° + \sin 135°$
b) $\sin\left(-30^{\circ}\right) - \cos 240^{\circ}$.

B: Lihtsustage avaldis $\dfrac{\cos^2(\pi + \alpha) - \cos^2\left(\alpha - 360^{\circ}\right)}{2\cos(-\alpha)}$. (K. Kaldmäe, A. Kontson, K. Matiisen, E. Pais)

C: Missuguste a väärtuste korral ületab tangensi väärtus kolme? (K. Kaldmäe, A. Kontson, K. Matiisen, E. Pais)
$\tan(180° + \alpha) = \dfrac{a^2 - 37}{a + 1}$</td></tr>
<tr><td>7) teab kahe nurga summa ja vahe valemeid;
8) tuletab ning teab kahekordse nurga siinuse, koosinuse ja tangensi valemeid;</td><td>Kahe nurga summa ja vahe trigonomeetrilised funktsioonid.
Kahekordse nurga trigonomeetrilised funktsioonid.</td><td></td><td>Tuletamisel on tähtis mõista, mis on antud ja mida on vaja näidata. Tegevust on vahel mõistlik jagada kaheks: tugevamatele õpilastele anda ette nn kava ning lasta neil iseseisvalt tegutseda, teistele õpilastele võib pakkuda vastupidist võimalust: mõelda, mis etapid tõestuses tehti, miks võis ja millele tuginedes sai tõestusega edasi liikuda.

Tasub õpetada kasutama valemite memoreerimiseks erinevaid tehnikavõtteid, nt
sin 2x = sin (x + x) = sin x cos x + cos x sin x
ja x – y = x + (–y).</td></tr>
<tr><td>9) teisendab lihtsamaid trigonomeetrilisi avaldisi;</td><td>Trigonomeetrilised avaldised.</td><td></td><td>Olgugi et teeme tehteid tähtavaldistega, oleks mõistlik paluda õpilastel kontrollida teisendamisel saadud tulemust, andes muutujatele arvulisi väärtusi.</td></tr>
</table>

Näiteülesanded

A: Rakendage kahekordse nurga valemit. (K. Kaldmäe, A. Kontson, K. Matiisen, E. Pais)

1) $4\sin 30°\cos 30°$
2) $\sin 22{,}5°\cos 22{,}5°$
3) $5\sin 10°\sin 80°$

B: 1. Leidke avaldise $\sin x-\cos x+\tan 2x$ väärtus, kui cos x = 0,6 ja x on neljanda veerandi nurk.

2. Lihtsustage avaldised.

1) $\cos 2x+\sin 2x\tan x$
2) $\dfrac{\cos x\cos y-\cos(x+y)}{\cos(x-y)-\sin x\sin y}$
3) $\dfrac{\tan\alpha-\tan(30°-\alpha)}{1+\tan\alpha\tan(30°-\alpha)}$

C: Avaldage $\sin 4\alpha$ ja $\cos 4\alpha$ nurga α trigonomeetriliste funktsioonide kaudu. (L. Lepmann, T. Lepmann, K. Velsker)

10) lahendab kolmnurga ning arvutab kolmnurga pindala; 11) tõestab siinus- ja koosinusteoreemi; 12) rakendab trigonomeetriat, lahendades erinevate eluvaldkondade ülesandeid.	Kolmnurga pindala valemid. Siinus- ja koosinusteoreem. Kolmnurga lahendamine. Rakendusülesanded.	Kolmnurga pindala valemi peaks tuletama ning järeldusena jõudma ka rööpküliku ja rombi uue pindala valemini. Kolmnurga lahendamisel võib vajaduse korral kasutada Heroni valemit. Õpilane leiab antud suuruste järgi erinevate kujundite korral (kolmnurgad, nelinurgad) lõikude pikkusi, nurki, ümbermõõtu ja pindala. Lahendamiseks pakutakse	Jooniste tegemine on matemaatika eluline rakendamine. Joonis peab vastama tekstile. Üldise kolmnurga ülesannetes peab vältima erijuhte (võrdkülgne, võrdhaarne, täisnurkne), vale joonis võib viia ülesande lihtsustumiseni. Eraldi tuleks analüüsida kolmnurga lahendamisel tekkida võivaid olukordi. Lähtuvalt algandmetest võib kolmnurki olla üks või kaks, kolmnurk võib ka mitte tekkida. Seega on tähelepanu all kahe võimalusega juhtum, kus on antud kaks külge ja neist lühema külje vastasnurk.

<table>
<tr><td></td><td></td><td>võimaluse korral ka reaalsete andmetega ülesandeid.</td><td>Ligikaudse arvutamise reeglite punktuaalne järgmine ei pea olema eesmärk, täpsuse määramisel piisab antud andmete täpsusele tuginemisest. Nn elust pärit ülesannetes tasub lähtuda kontekstist.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Näiteülesanded

A: Lahendage kolmnurk, kui $a = 68$, $b = 92{,}1$, $\alpha = 42°$. (T. Tõnso, A. Veelmaa)

B: Rabas tuleb ligipääsmatust punktist A teise samasugusesse punkti B ehitada laudtee. Selleks märgitakse punktidega A ja B samale sirgele nende vahele punkt C ja väljapoole seda sirget punkt D. Lisaks mõõdetakse teodoliidiga veel mõned nurgad. Kui pika laudtee peab ehitama, kui $CD = 400$ m, $\alpha = 95°20'$, ; $\beta = 24°40'$, $\gamma = 52°5'$? (K. Kaldmäe, A. Kontson, K. Matiisen, E. Pais)

C: Ülesanne RE 2015
Õpilane Mari joonestas GeoGebra arvutiprogrammi järgi kolmnurga ABC. Kolmnurga külje BC pikkus oli 10 cm ja selle külje lähisnurgad olid $\angle ACB = 25°$ ja $\angle ABC = 50°$. Mari joonestas küljele BC kõrguse AD, mis jaotas kolmnurga ABC kaheks osaks: kolmnurkadeks ABD ja ACD. Kuna nurk ABD oli 2 korda suurem kui nurk ACD, siis arvas Mari, et ka kolmnurga ACD pindala on 2 korda suurem kui kolmnurga ABD pindala. Arvutage kolmnurkade ACD ja ABD pindalad ning otsustage, kas Maril oli õigus.</td></tr>
</table>

Lõiming

Lõiminguna saame selles kursuses näited perioodiliste funktsioonide kohta, millele on rakendusi füüsikas. Need võimaldavad tegelda algebraga ning õppida tõestamist ja loogilist järeldamist.

5. kursus

Vektor tasandil. Joone võrrand

Eemärgid:

1) saavutada allkirjeldatud õpitulemused nii, et õpilane omandab tüüpülesandeid ning kergemaid mitterutiinseid ülesandeid lahendades õppekavas kirjeldatud oskused;
2) arendada õpitegevuse kaudu üld- ja ainepädevusi nii, et õpilane suudaks lahendada keerukamaid ülesandeid, mis võimaldaksid õppekavas kirjeldatud teadmisi ja oskusi rakendada väga heal tasemel.

Üld- ja ainepädevused:

1) suutlikkus kasutada vastavale alateemale omast keelt, sümboleid ning meetodeid. Selleks nõuda kirjalikus ja suulises eneseväljenduses distsiplineeritult mõistete ning keelesümboolika kasutamist;
2) suutlikkus arutleda loovalt ja loogiliselt ning leida ülesande lahendamiseks sobivad strateegiad. Selleks käsitleda ülesannete lahendamise üldisi strateegiaid;
3) suutlikkus põhjendada ja tõestada oma mõttekäike, kusjuures tõestada mitte niivõrd väite tõesuse näitamiseks, kuivõrd aitamaks luua üksikteadmistes süsteemi;
4) suutlikkus analüüsida ja esitada alternatiive ning oskus teha valikuid. Selleks käsitleda üht ülesannet eri vaatenurkadest ja soodustada erinevate lahendusteede otsimist;
5) suutlikkus reflekteerida oma tegevust ning kriitiliselt hinnata tegevuse resultaati. Selleks peaks õpilane esitama iseendale küsimusi: mida ma teen; miks ma nii teen; milleni ma olen jõudnud ning kas tulemus on õige ja kontrollitav.

Eelduskursused:

1) matemaatika lai II kursus (võrrandid ja võrrandisüsteemid);
2) põhikooli õppekavas kirjeldatud teadmised koordinaattasandist, sirgest ja paraboolist ning geomeetriliste kujundite joonelementide vahelistest seostest.

Ülesannetega raskusaste:

A – tüüpilisi algoritme rakendav arvutus- või teisendusülesanne;
B – ühe- või kaheetapilise suhteliselt tuntud mudeli koostamise ja rakendamise ülesanne;
C – mitmeetapilise mudeli loomise ja rakendamise ülesanne.

Õpitulemused	Õppesisu	Oskuste ja teadmiste täpsustused	Soovitused
Õpilane: 1) leiab kahe punkti vahelise kauguse ja	Kahe punkti vaheline kaugus, lõigu keskpunkti koordinaadid. Vektori mõiste	Selgitusi võib pidada piisavaks, kui õpilane nimetab vektori kolm komponenti, osutab joonistel	Ristkoordinaatides ladusama toimimise saavutamiseks tasub harjutada nn

lõigu keskpunkti koordinaadid; 2) selgitab mõisteid *vektor*, *ühik*-, *null*- ja *vastandvektor*, *vektori koordinaadid*, liigitab vektoreid, kujutab vektoreid joonisel, leiab vektori koordinaate ning selle otspunktide koordinaate joonisel ja aritmeetiliselt, võrdleb vektoreid;	ja tähistamine. Nullvektor, ühikvektor, vastandvektor, seotud vektor, vabavektor. Vektorite võrdsus. Vektori koordinaadid. Vektori pikkus.	vektoreid, lähtudes sihist ja suunast, kirjeldab oma sõnadega vektorit kui punkti nihet, asukoha muutust ja suunatud lõiku, osutab vektori koordinaate teljesihiliselt ning seob oma kirjeldused täisnurkse kolmnurga kaatetitega.	värvimisülesandeid, nt viirutada tasandi piirkond, mis vastab võrratusele $-5 < x < -1$ või süsteemile $\begin{cases} 1 < x < 3 \\ -1 < y < 1{,}5 \end{cases}$ jms. Vektori assotsiatiivne sidumine täisnurkse kolmnurgaga soodustab valdkonnaüleste ülesannete lahendusideede tekkimist. Vektori koordinaatide valemeid ning nende tuletamist kasutatakse pigem kui üldistus- või tõestusülesande eesmärki. Lõigu pikkuse ja keskpunkti koordinaatide leidmist on soovitatav käsitleda samal ajal vektori pikkuse käsitlemisega. Tähelepanu tasub pöörata punkti kohavektori kasutamisele erinevates ülesannetes. IT pädevuse arendamiseks tutvustatakse vektorite veerulist esitusviisi, mis esineb tarkvara rakendustes.

Näiteülesanded

A: Leidke kahe punkti vaheline kaugus, kui punktid on antud, ja lõigu keskpunkt. Leidke vektori koordinaadid, algus- või lõpp-punkti koordinaadid, kui kaks neist on antud.

B: Rööpküliku määravad fikseeritud koordinaatidega punkti (nt $A(1;3)$) rakendatud vektorid, mille koordinaadid on antud. Nimetage rööpküliku tippude koordinaadid, diagonaale määravate vektorite koordinaadid ning diagonaalide lõikepunktide koordinaadid. Arvutage rööpküliku külgedest ja diagonaalidest moodustunud kolmnurkade ümbermõõtude erinevus.

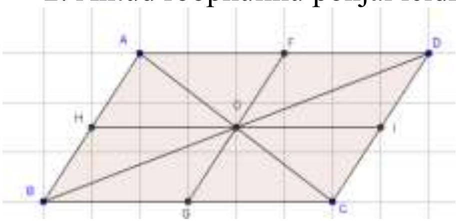
C: Olgu antud punktide □(□; □$^2 - 3$) ja $B(m; 2m)$ kohavektorid. Millise parameetri m väärtuse korral on need vastandvektorid?

3) liidab, lahutab ja korrutab vektoreid arvuga nii geomeetriliselt kui ka koordinaatkujul; 4) kasutab vektori pikkust koordinaattasandil antud hulknurga joonelementide leidmiseks;	Vektorite liitmine ja lahutamine. Vektori korrutamine arvuga.	Õpilane: 1) selgitab vektorite lahutamist ning vastandvektori liitmist võrdsete protseduuridena; 2) avaldab antud vektorite kaudu geomeetrilistest kujunditest koosneval võrgustikul esitatud nihkeid; 3) arendab vektorite komponentideks lahutamise oskust;	Vektori korrutamine arvuga seotakse vektori esitamisega ühikvektorite kaudu. Liitmisel ja lahutamisel kasutatakse ka ühikvektorite kujul antud vektoreid.

Näiteülesanded

A: 1. On antud vektorid $\vec{a} = (1; -2), \vec{b} = (-1; 3); \vec{c} = (2; 2)$. Leidke vektori   koordinaadid.

2. Antud rööpküliku põhjal leidke $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{OG}$.



<table>
<tr><td colspan="4">B: 1. Vektorite $\vec{\square}$ ja $\vec{\square}$ pikkused on vastavalt 4 ja 1. $\vec{\square}=\vec{\square}+\vec{\square}$. Arvestades vektorite kõikvõimalikke vastastikuseid asendeid, mis on vektori $\vec{\square}$ suurim/vähim võimalik pikkus? Vektorite pikkuste asemel saab ülesannet varieerida vektori koordinaatidega.
2. Kolmnurga tipud on antud. Leidke kolmnurga ühele küljele tõmmatud mediaani pikkus või ühe küljega paralleelse kesklõigu pikkus.

C: 1. A, B, C ja D on punktid tasandil. Leidke punkti M asukoht nii, et $\overrightarrow{\square\square}+\overrightarrow{\square\square}=\overrightarrow{\square\square}$. (I. Šarõgin)
2. On antud lõigu otspunktid A ja B. Leidke punkti C koordinaadid nii, et lõik jaotuks antud suhtes, näiteks 2 : 3.</td></tr>
<tr><td>5) määrab vektorite ristseisu ja kollineaarsuse;
6) arvutab skalaarkorrutise (nii valemi $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$ kui ka valemi $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2$ järgi), arvutab nurga vektorite vahel;</td><td>Vektorite kollineaarsus. Kahe vektori skalaarkorrutis, selle rakendusi, vektorite ristseis. Kahe vektori vaheline nurk.</td><td>4) määrab hulknurga liigi, kontrollides hulknurga tunnuseid vektorite kaudu;
5) rakendab teadmist hulknurga tunnustest vektorite meetodiga lahendamise jaoks;
6) tuletab vektorite vahelise nurga arvutamise valemi näiteks koosinusteoreemist lähtudes;</td><td>Õpilaste tähelepanu juhitakse kolmnurga lahendamise võtete kasutamise võimalikkusele vektorülesandeid lahendades.

Vektorite vahelise nurga arvutamise valemi vastandülesandena pakutakse koosinusteoreemi tõestamist, kasutades skalaarkorrutise omadust.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Näiteülesanded

A: On antud kaks vektorit. Leidke nende vektorite vaheline nurk või kontrollige, kas need on risti või kollineaarsed.

B: 1. Määrake vektorite koordinaatides parameeteri väärtus nii, et vektorid oleksid kollineaarsed või risti.
2. Antud on hulknurga tipud koordinaatidega. Näidake, et tegemist on ülesandes nimetatud hulknurgaga.

C: Leidke tasandil selline punkt M, kus $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD}$, kusjuures A, B, C ja D on ruudu tipud.</td></tr>
<tr><td>7) lahendab kolmnurka vektorite järgi;</td><td>Kolmnurkade lahendamine vektorite järgi.</td><td>7) rakendab kolmnurga lahendamise võtete ning</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>vektorite meetodi kombineerimise võimalusi ülesande esituse järgi;
8) lahendab hulknurka, kui ülesannet saab lahendada kursusel omandatud oskuste piires;
9) suudab analüütilise lahenduse kaudu hinnata või kontrollida loodud joonise tõepärasust ning vastupidi;</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td colspan="4">Näiteülesanded

A: 1. (A, kui kasutatakse tarkvara; C, kui kasutatakse muud lahendusviisi.) Golfimängijal kulub palli auku löömiseks kolm lööki. Esimesega lendab pall 20 m põhja poole, teisega 5 m loode poole ja viimasega 1 m kaugusele 10° põhjasuuna suhtes vastupäeva. Kui pika ja mis suunas löögiga saab need kolm lööki asendada?
2. Nelinurkse maatüki tipud plaanil on A(–7; 0), B(–4; 6), C(7; –4), D(–2; 5). Leidke maatüki nurgad ning ümbermõõt täpsusega 0,1.
(L. Lepmann, T. Lepmann, K. Velsker)

C: Tõestage, et kahe vektori $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ korral kehtib $||\vec{a}| - |\vec{b}|| \leq |\vec{a} + \vec{b}|$, ning veenduge valemi kehtivuses, kui $\vec{a} = 8\vec{i} - 6\vec{j}$ ja $\vec{b} = 3\vec{i} + 46\vec{j}$.
(R. Kolde, T. Kaljas)</td>
</tr>
<tr>
<td>8) tuletab ja koostab sirge võrrandi, kui sirge on määratud punkti ja sihivektoriga, punkti ja tõusuga, tõusu ja algordinaadiga, kahe punktiga, ning teisendab selle üldvõrrandiks;</td>
<td>Sirge võrrand.
Sirge üldvõrrand.</td>
<td>10) oskab igast sirge võrrandi kujust esile tuua tõusu, sihivektori koordinaadid ja ühe punkti sellel sirgel;
11) kujutab sirget tema erinevate võrrandi kujude põhjal;
12) koostab sirge võrrandi joonise põhjal;</td>
<td>Arendatakse vaatlus- ning mõistmisoskust, arvestades seda, et silmaga nähtav on enamikule õpilastele tajutavam ning veenvam loogilisest arutlusest. Loogilist deduktiivset vaadet tuletuskäikudes hakatakse käsitlema üldise mõistmise ja taipamise saavutamise järel, pärast seda tasub võrrandite tuletamist esitada ülesandena.</td>
</tr>
</table>

			Sirgeid õpetades kasutatakse sirge normaalvektori mõistet. Õpilasel peaks kinnistuma arusaam, et kogu teema õpetab ühest ja samast objektist – sirgest – rääkima eri viisidel. Õpilane: 1) koostab sirge võrrandi kahe punktiga, kasutades lineaarsüsteemi, kus muutujad on asendatud punkti koordinaatidega, ning suudab põhjendada, mis printsiibil see võte toimib; 2) taipab, mis tähendus on sirgete lõikepunkidel ja milline on seos kahe muutuja vahel, mis väljendavad punkte, mis asuvad ühel sirgel. Arendatakse oskust teisendada sirge võrrandeid ühelt kujult teisele, sh parameetrilisele kujule ja telglõikudesse. Kasutatakse ülesannetes telgedel ühikuid 100, 200 jne või 10^6 tonni jne. Mõtlemist arendatakse põhikooli kursusest tuttavaid ülesandeid lahendades ning küsimusi lisades, millele vastamiseks tuleb kasutada juba sellel

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>kursusel õpitud teadmisi või interpreteerida teadmisi uuel viisil.</td></tr>
<tr><td>9) määrab kahe sirge vastastikuse asendi tasandil, lõikuvate sirgete korral leiab sirgete lõikepunkti ja nurga(d) sirgete vahel;</td><td>Kahe sirge vastastikused asendid tasandil.
Nurk kahe sirge vahel.</td><td>13) oskab määrata sirgete vastastikuseid asendeid võrrandite põhjal ja kirjutada antud sirgele antud punkti kaudu ristuva või paralleelse sirge võrrandit;</td><td>Õpilasi õpetatakse leidma nurka sirgete vahel erinevate meetoditega, ka tõusunurkade vahe kaudu, ning neid meetodeid põhjendama.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Näiteülesanded

A: 1. Lahendage kolmnurk, kui kolmnurga küljed on antud sirge võrranditega, kirjutage selles kolmnurgas ühele küljele tõmmatud mediaani, kõrguse või kesklõigu võrrand.
2. Sirge lõikab abstsisstelge kohal –3 ja ordinaattelge kohal 4. Koostage sirge võrrand ning sellise sirge võrrand, mis on saadud koordinaatteljest peegeldamise teel.

B: Ruudu diagonaal asub sirgel $-3x - 5y = -15$ ning üks tipp punktis (1; 0). Leidke ruudu diagonaalide lõikepunkti koordinaadid.

C: Mis seoses peavad olema parameetrid a ja b, et sirge $ax - by = 1$ lõikaks x-telge nurga all?</td></tr>
<tr><td>10) koostab hüperbooli, parabooli ja ringjoone võrrandi ning kujutab ainekavas esitatud jooni nende võrrandite järgi;</td><td>Parabooli, hüperbooli ja ringjoone võrrand.
Joone võrrandi mõiste.</td><td>14) tunneb teist järku joone ja selle üldvõrrandi mõistet. Määrab ringjoone ja y-telje sihis avaneva parabooli võrrandi teist järku joonte võrrandite hulgast;
15) koostab ringjoone võrrandi keskpunkti koordinaatide ja raadiuse kaudu;</td><td>Hüperbooli tutvustades kasutatakse asümptoodi mõistet.

Lähtuvalt õppe võimalustest tutvustatakse parabooli ja hüperbooli defineerimist, kasutades fookust, ning kujutatakse jooni nende kanooniliste võrrandite kaudu.

Selle osa omandatuse haardeline tase lihtsustab oluliselt funktsiooni uurimise elementide õppimist järgmistel kursustel.</td></tr>
</table>

		16) koostab parabooli $\square\square^2 + \square\square + \square = \square$ võrrandi. Koostab hüperbooli võrrandi kujul $\square\square = \square$ etteantud punkti kaudu parameetri *a* määramiseks; 17) kujutab nimetatud jooni koordinaattasandil nende võrrandite järgi;	Vaadeldakse erikujulisi jooni ning nende võrrandeid, kujutatakse neid ristkoordinaatides antud võrrandite põhjal, nt ellips, astroid, Descartes'i leht vms. IT pädevuse arendamiseks tutvustatakse joone võrrandite lineaarset kirjapilti. Vaadeldakse $y = f(x)$ avaldatud kuju kasutamist tarkvara võimaluste põhjal. Tarkvaralahendusi kasutades uuritakse ning sõnastatakse joone võrrandites parameetrite muutmise kaudu joone kuju muutumist ning paiknemist koordinaattasandil.

Näiteülesanded

A: Kirjutage välja antud joonte kujutamiseks piisavate punktide koordinaadid ning põhjendage oma valikut.

$x^2 + y^2 + 3 = 0$

$x^2 + y + 3 = 0$

$xy + 3 = 0$

$x^2 + y^2 - 3 = 0$

$x^2 - y + 3 = 0$

B: Hüperbool läbib punkte (1; 9) ning (–1; 9). Koostage hüperbooli võrrand. Milliseid selle hüperbooli punkte läbib ringjoon, mille diameeter on määratud samade punktidega.

C: Antud on parabool $2y^2 - 5x = 0$. Koostage parabooli võrrand, mis saadakse selle parabooli peegeldamise teel sirgest $y = x$.

11) arvutab kahe joone lõikepunkti koordinaadid.	Kahe joone lõikepunktide leidmine.	18) visandab joonised eelnimetatud kahe joone vastastikuste asendite võimalustest tasandil; 19) kujutab jooni koordinaattasandil ning oskab leida eespool nimetatud joonte ja sirge lõikepunkte; 20) arvutab võrrandisüsteemide lahendamise võtteid kasutades joonte lõikepunktide koordinaate. Süsteemi lahendamise keerukus piirneb II kursusel kirjeldatud oskuste rakendamisega; 21) hindab või kontrollib analüütilise lahenduse kaudu loodud joonise tõepärasust ning vastupidi.	Tarkvaralahenduste kasutamine lahendusideede läbimängimiseks või enesekontrolliks on IT-alaste pädevuste arendamiseks soositud.

Näiteülesanded

A: Leidke võrrandiga antud ringjoone koordinaattelgedega ristuvate diameetrite võrrandid. (V. Luigelaht, E. Reimann)

A/B: Lahendage võrrandisüsteem graafiliselt ja arvutuste põhjal.

B: Leidke ringjoone võrrand, kui selle diameeter on lõik joonte $y = x^2 - 6x + 8$ ja $y = 4x - x^2$ lõikepunktide vahel.

B+C: Mitu lõikepunkti saab olla joontel $xy = a$ ning $x^2 + y^2 = 5$? Veenduge selles, et $a = 2$ korral on süsteemil 4 lahendit. Millise a korral on antud kahel joonel 2 ühist punkti? (Viimane küsimus teeb ülesandest C-raskusastmega ülesande.)

C: Leidke ringjoone $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$ puutujad, mis on paralleelsed sirgega.

Lõiming ning läbivad teemad

Selgitatakse vektorit kui nihet, asukoha muutuse kirjeldust. Käsitletakse skalaariks nimetatud suurusi ja vektoriteks nimetatud suurusi. Tutvustatakse vektorite kasutamist dünaamika visualiseerimisel nii tasandil kui ka ruumis. Tutvustatakse geograafiliste koordinaatide kasutamise eripära näiteks lennunduses. Seotakse näitlikustamist ning kommentaare nii, et õpilane on võimeline teadmisi vektoritest, nende kujutamisest ning omadustest üle kandma 2D ja 3D rakendustes töötamiseks. Visualiseerides toetutakse joonte kasutamisele kujutavas kunstis ainetevahelise sidususe ning esteetilise kasvatuse eesmärgil.

6. kursus

Tõenäosus. Statistika

Eesmärgid:

1) tutvustada õppijale hästi valitud temaatikaga matemaatikaülesannete kaudu reaalsuse valdkonda, mis on seotud juhuslike nähtuste ja suurustega. Jõuda tüüpülesandeid lahendades õppekava omandatuseni;
2) *kujundada õpilases hästi valitud probleemi avamise kaudu suutlikkus organiseerida andmeid ja interpreteerida neid, kasutades tarkvaralahendusi. Jõuda info tõlgendamise oskust arendades arvutusvõtete otstarbeka valimise ning rakendamise kaudu õppekava omandatuseni*;
3) *arendada õpitegevuses üld- ja ainealaseid pädevusi nii, et väga heal tasemel õpilane suudaks* oma lahenduskäiku põhjendada, tulemust kriitiliselt hinnata ning mõtteid selgelt, lühidalt ja täpselt edasi anda.

Üld- ja ainepädevused:

1) suutlikkus uurida ise seoseid, tuua oma näiteid, selgitada ja põhjendada oma mõttekäike ning reflekteerida oma tegevust. Vale lahenduskäigu analüüsimise kaudu jõuda oma eksimuste sisulise mõistmiseni. Selleks lõimida selle kursuse õppesisu uurimistööga;
2) suutlikkus mõista tekste ning tõlgendada infot, otsida vastavaid andmeid ning seeläbi kokku puutuda tegeliku elu ilmingutega. Selleks kasutada meedias avaldatud materjali ja siduda seda õpilase minapildiga;
3) suutlikkus õpipädevuse kujunemise korral arendada analüüsimise ja tulemuste kriitilise hindamise oskust. Selleks vaagida sama valdkonna kohta antud erinevaid hinnanguid ning meetodeid, millele hinnangud tuginevad;
4) suutlikkus suhtluspädevuse kujunemise korral oma mõtteid selgelt, lühidalt ja täpselt edasi anda. Võib teha teatud mööndusi suurema selguse huvides, peaasi, et esitus oleks sisult õige ja arusaadav.

Eelduskursused: põhikooli õppekavas kirjeldatud teadmised kirjeldavast statistikast ning tõenäosusest.

Ülesannetega raskusaste:

A – tüüpilisi algoritme rakendav arvutus- või teisendusülesanne;
B – ühe- või kaheetapilise suhteliselt tuntud mudeli koostamise ja rakendamise ülesanne;
C – mitmeetapilise mudeli loomise ja rakendamise ülesanne.

Õpitulemused	**Õppesisu**	**Oskuste ja teadmiste täpsustused**	**Soovitused**
Õpilane: 1) selgitab permutatsioonide, kombinatsioonide ja variatsioonide tähendust ning leiab nende arvu;	Kombinatoorika elemendid: permutatsioonid, kombinatsioonid ja variatsioonid.	Õpilane: 1) oskab otsustada, millal kasutada permutatsioone ja millal variatsioone või kombinatsioone. Ülesanded ei pea ületama B-taset, ühe- või kaheetapilise suhteliselt tuntud mudeli koostamist ja rakendamist;	Permutatsioonide, kombinatsioonide ja variatsioonide arvu leidmiseks kasutab õpilane taskuarvutit või mõnda tarkvaralahendust. Õpilastele antakse piisavalt aega välja uurida nende kasutuses olevate tehniliste abivahendite toimimisviis ning omandada selle kasutamine.
2) eristab juhuslikku, kindlat ja võimatut sündmust ning selgitab sündmuse tõenäosuse mõistet, liike ja omadusi; 3) selgitab sõltuvate ja sõltumatute sündmuste korrutise ning välistavate ja mittevälistavate	Sündmus. Sündmuste liigid. Klassikaline tõenäosus. Suhteline sagedus, statistiline tõenäosus. Geomeetriline tõenäosus. Sündmuste liigid: sõltuvad ja sõltumatud, välistavad ja mittevälistavad. Tõenäosuste liitmine ja korrutamine. Bernoulli valem.	2) sõnastab etteantud sündmuse vastandsündmuse ning suudab lahendada alaülesandeid, kasutades vastandsündmust; 3) eristab Bernoulli katset teistest katseliikidest ja suudab oma valikut põhjendada. Seletab Bernoulli valemit konkreetse näite varal, nt selgitab antud seemne idanemisprotsendi juures 6 seemne hulgas idanemise tõenäosust.	Toetatakse õpilase arusaamist eestikeelses lauses sisalduvate sõnade *ja* ning *või* tõlkimisest matemaatikakeelde. Mitut tehet nõudva sündmuse tõenäosust arvutades saab õpilastele abiks pakkuda vaadeldava sündmuse eesti keeles kirjeldamist ning vältida seejuures matemaatilist sümboolikat. Täistõenäosuse leidmist tõenäosuste liitmise ja korrutamine rakendusena kasutatakse

<table>
<tr>
<td>sündmuste summa tähendust;
4) arvutab erinevate sündmuste tõenäosust;</td>
<td></td>
<td></td>
<td>mitmeetapilise mudeli loomise ja rakendamise ülesandena.

Geomeetrilist tõenäosust käsitledes vaadeldakse kaht tüüpi ülesandeid: pindalade suhete leidmisel ja ajatelje kasutamisel põhinevaid.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="4">Näiteülesanded

A: Võtke kaardipakist juhuslikult üks kaart. Leidke, et see kaart on ärtu, et see kaart pole ärtu äss jne. (T. Tõnso)

B: 1. (Bernoulli valem) Kumb on tõenäolisem, kas võita võrdse vastasega mängides 3 partiid 5st või 4 partiid 6st? (T. Tõnso ja A. Veelmaa õpik 12. klassile)
2. (Geomeetriline tõenäosus) Ukse ees on ruudukujuliste avadega võre, mille külje pikkus on a. Võre poole visatakse pall, mille raadius on r. Leidke tõenäosus, et pall lendab võrest läbi seda puudutamata. (T. Tõnso ja A. Veelmaa õpik 12. klassile)

C: (Täistõenäosus) Kahel põllul kasvab ühesugune kartul, mis valati ühte kuhja. Esimese põllu kartulitest on jüripäevaks 4% mädanenud, teise põllu kartulitest 2%. Esimeselt põllult saadi kaks korda rohkem kartuleid kui teiselt põllult. Kui suur on tõenäosus, et jüripäeval kuhjast võetud kartul on mädanenud? (T. Tõnso ja A. Veelmaa õpik 12. klassile)</td>
</tr>
<tr>
<td>5) selgitab valimi ja üldkogumi mõistet, andmete süstematiseerimise ja statistilise otsustuse usaldatavuse tähendust;
6) arvutab karakteristikute väärtused (keskväärtus, mood,</td>
<td>Üldkogum ja valim. Andmete kogumine ja süstematiseerimine. Statistilise andmestiku analüüsimine ühe tunnuse järgi.</td>
<td>4) määrab tunnusetüüpide ja karakteristikute vastastikuse sobivuse ning leiab valimi järgi üldkogumi keskmise usalduspiirkonna.

Uudne on üldkogumi arvnäitajate tõenäosuslik hindamine valimi arvnäitajate järgi. Selle kohta vt täpsemalt näiteks Kadri Hiobi raamatust „Matemaatiline</td>
<td>Valdkonna sissejuhatuseks loetakse teabetekste ning analüüsitakse kriitiliselt meedias esitatud ja diagrammidega illustreeritud sõnumeid, et valmistada ette karakteristikute põhjal järelduste tegemiste oskust.

Arvestataval kohal peaks olema Eesti Statistikaameti avaldatavad andmed ja tabelid ning neil põhinevad ülesanded.</td>
</tr>
</table>

mediaan, dispersioon, standardhälve) väikese andmehulga korral kirjalikult, suurema andmehulga korral koostab tarkvaravahendeid kasutades sagedustabeli, illustreerib seda diagrammidega, kasutades tarkvaralahendusi;		statistika: algkursus koolidele“ (Tallinn: Avita, 1995). Teema käsitlemisel on vaja esitada usalduspiiride, usaldusvahemiku (usalduspiirkonna), usaldus- ja olulisusnivoo mõiste.	Vaadeldakse katseid ja katseseeriaid ning analüüsitakse, mis arvutused või otsused on otstarbekad. Selgitatakse hinnangu, arvamuse ja mõõdetud tunnuse käsitlemise erinevusi ning sarnasusi. Hajuvuse karakteristikuid käsitledes juhitakse tähelepanu sellele, et dispersioon on sisuliselt hälvete ruutude aritmeetiline keskmine, seega kujuneb õpilase jaoks ainsaks uueks mõisteks *hälve*. Näiteks ülesandes nõutud arvutustulemuseni jõudmine: „Paralleelklasside *A* ja *B* ühe ja sama kontrolltöö keskmine hinne on 4, kuid klassi *A* hinnete standardhälve on oluliselt suurem kui klassis *B*.” Sellega piirdumine oleks ülesande formaalne lahendamine heal tasemel. Väga hea lahenduse korral peab järgnema tulemuste analüüs ning võrdlust sisaldav hinnang.
7) arvutab juhusliku suuruse jaotuse arvkarakteristikuid ning teeb nende alusel järeldusi jaotuse või uuritava probleemi kohta;	Diskreetne ja pidev juhuslik suurus, diskreetse jaotuse keskväärtus ja standardhälve. Binoomjaotus. Jaotuspolügoon. Normaaljaotus (näidete varal).		Loetakse statistilist analüüsi sisaldavaid tekste. Lihtsalt leitav ning toetav on näiteks varasemate RE tulemuste ja statistilistes ülevaadetes esitatud jaotuste kirjeldamine ning mõtestamine.

Näiteülesanded

A: Ruletirattal on 18 punast, 18 musta ja 2 rohelist numbrit. Üks võimalikest ruletipanustest on 10-eurose žetooni panemine punasele värvile. Koostage jaotustabel ja leidke võidu keskväärtus. (T. Tõnso ja A. Veelmaa õpik 12. klassile)

B: Mitu protsenti peaks keskmiselt olema viisi, neljasid, kolmesid, kahtesid ja ühtesid, et võiks öelda, et hindamine on normaalne ning et tublisid ei nöögita, aga laisad saavad nuhelda. (T. Tõnso ja A. Veelmaa õpik 12. klassile)

8) selgitab arvandmete ja korrelatsioonivälja graafiku tähendust;	Korrelatsiooniväli. Lineaarne korrelatsioonikordaja.		Õpilastele selgitatakse tunnuse põhjal järeldamise ja tunnustevaheliste seoste põhjal järeldamise erinevust, andes neile otsuste sõnastamiseks toeks lausevormeleid, millele saab tugineda. Ühe/kahe säärase ülesande lahendamine peaks andma piisava kogemuse ja ettekujutuse tunnuse kirjeldamise ning tunnustevahelise seose leidmise erinevustest. Kirjeldava statistika karakteristikute arvutamist, kaasa arvatud lineaarne mudel ning selle headus, ja nendest võimalike järelduste tegemist on vaja eraldi õpetada ning selgitada kas eraldi kursuses või mingi teise korraldusliku lahenduse kaudu.

Näiteülesanded

A: Õpilane suudab realiseerida klasside jaotuse, arvutada paiknevuse karakteristikud, lugeda diagramme.

B: Õpilane koostab korrelatsioonivälja, kasutades tarkvaralahendusi, ning otsustab, kas vaadeldav õpilane õppis alla või üle normi (võimete) selle klassi koosseisu ja õppetingimuste korral.

C: Arvutage oma klassi kahe aine (nt matemaatika ja füüsika või matemaatika ja eesti keele) hinnete korrelatsioonikordaja ning tehke siis järeldusi kogu klassi kohta, kui tugev on seos vaadeldava ainepaari hinnete vahel. Kui võtta kaks ainepaari, kas siis on seos tugevam ühe või teise ainepaari korral?			
9) kogub andmestiku ja analüüsib seda arvutil statistiliste vahenditega.	Andmetöötluse projekt, mis realiseeritakse arvutiga (soovitatavalt koostöös mõne teise õppeainega või uurimistööna).		Andmeid töödeldakse soovitatavalt gümnaasiumi õppekavas ja lõpetamise tingimustes kirjeldatud uurimistöös.

Lõiming

Õpetaja saab kursusesse lõimida peagu kõiki ainevaldkondi ning reaalseid situatsioone vastavasisuliste andmestike kasutamisega ja võimalike sündmuste (statistilise) tõenäosuste arvutamisega, nt keskkond ja jätkusuutlik areng, tervis ja ohutus, väärtused ja kõlblus.

7. kursus

Funktsioonid. Arvjadad

Eesmärgid:

1) saavutada allkirjeldatud õpitulemused nii, et õpilane omandab tüüpülesandeid ning kergemaid mitterutiinseid ülesandeid lahendades õppekavas kirjeldatud oskused;
2) arendada õpitegevuse kaudu üld- ja ainepädevusi nii, et õpilane suudaks lahendada keerukamaid ülesandeid, mis võimaldaksid õppekavas kirjeldatud teadmisi ja oskusi rakendada väga heal tasemel.

Üld- ja ainepädevused:

1) suutlikkus kasutada vastavale alateemale omast keelt, sümboleid ning meetodeid. Selleks nõuda kirjalikus ja suulises eneseväljenduses distsiplineeritult mõistete ning keelesümboolika rakendamist;
2) suutlikkus arutleda loovalt ja loogiliselt ning leida ülesande lahendamiseks sobivad strateegiad. Selleks käsitleda ülesannete lahendamise üldisi strateegiaid;

3) suutlikkus põhjendada ja tõestada oma mõttekäike, kusjuures tõestada mitte niivõrd väite tõesuse näitamiseks, kuivõrd aitamaks luua üksikteadmistes süsteemi;
4) suutlikkus analüüsida ja esitada alternatiive ning oskus teha valikuid. Selleks käsitleda üht ülesannet eri vaatenurkadest ja soodustada erinevate lahendusteede otsimist;
5) suutlikkus reflekteerida oma tegevust ning kriitiliselt hinnata tegevuse resultaati. Selleks peaks õpilane esitama iseendale küsimusi: mida ma teen, miks ma nii teen, milleni ma olen jõudnud ning kas tulemus on õige ja kontrollitav.

Eelduskursused: gümnaasiumi matemaatika lai
I kursus (avaldised);
II kursus (võrrandid ja võrrandisüsteemid);
III kursus (võrratused ja võrratussüsteemid);
V kursus (joone võrrand).

Ülesannetega raskusaste:
A – tüüpilisi algoritme rakendav arvutus- või teisendusülesanne;
B – ühe- või kaheetapilise suhteliselt tuntud mudeli koostamise ja rakendamise ülesanne;
C – mitmeetapilise mudeli loomise ja rakendamise ülesanne.

Õpitulemused	Õppesisu	Oskuste ja teadmiste täpsustused	Soovitused
Õpilane: 1) selgitab funktsiooni mõistet ja üldtähist ning funktsiooni uurimisega seonduvaid mõisteid;	Funktsioonid $y = ax + b$, $y = ax^2 + bx + c$, $y = a/x$ (kordavalt). Funktsiooni mõiste ja üldtähis. Funktsiooni esitusviisid. Funktsiooni määramis- ja muutumispiirkond.	Õpilane: 1) teab mõisteid *sõltuv* ja *sõltumatu muutuja*, *argument* ja *funktsiooni väärtus*, *funktsiooni määramis*- ja *muutumispiirkond*;	Soovitusi andes lähtume käibivast õpikust (autorid Lea ja Tiit Lepmann, Kalle Velsker). Üldjuhul on õpiku A-osa ülesanded A- ja B-taseme ülesanded, õpiku B-osa ülesanded on B- ja C-taseme ülesanded. Harjutatakse funktsiooni koostamist teksti järgi. Näide. Terasvedru pikeneb koormuse suurenemisel iga kilogrammi mõjul 0,5 cm võrra. Väljendage vedru pikkus L (cm) koormuse m (kg) kaudu, kui

			vedru algpikkus on 5 cm. (L. Lepmann, T. Lepmann, K. Velsker) Lisaks võib tugevamatele õpilastele soovitada TÜ Teaduskooli õppematerjali „Graafiline lineaarne planeerimine. Funktsioonidest ja nende graafikutest“ (autor Hilja Afanasjeva).

Näiteülesanded

A: Leidke funktsiooni määramispiirkond ja nullkohad.

$$f(x) = \frac{4}{x-1}$$

$$f(x) = \sqrt{3x-2}$$

$$f(x) = \sqrt{5x - x^2}$$

$$f(x) = \sqrt[3]{7x^2 - x - 6}$$

B: Leidke funktsiooni määramispiirkond ja nullkohad.

$$f(x) = \frac{4}{x^2 - 1}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{3-x}{6x+1}}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{3x+5}$$

C: Leidke funktsiooni määramispiirkond.

$$f(x) = \sqrt{\frac{3-x}{6x+1}} + \sqrt{4-x^2}$$			
2) kirjeldab graafiliselt esitatud funktsiooni omadusi; skitseerib graafikuid ning joonestab neid arvutiprogrammidega;	Paaris- ja paaritu funktsioon. Funktsiooni nullkohad, positiivsus- ja negatiivsuspiirkond. Funktsiooni kasvamine ja kahanemine. Funktsiooni ekstreemum. Astmefunktsioon. Funktsioonide $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^{-1}$, $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$, $y = x^{-2}$, $y = \lvert x \rvert$ graafikud ja omadused.	2) leiab graafikult nullkohad, positiivsus- ja negatiivsuspiirkonnad; ekstreemumkohad, ekstreemumpunktid, kasvamis- ja kahanemispiirkonnad, loeb välja sirge algordinaadi ja tõusu, skitseerib sirge, parabooli ja hüperbooli ning joonestab graafikuid arvutiprogrammiga GeoGebra (või mingi teise programmiga); 3) seob graafiku funktsiooni võrrandiga ja vastupidi, leiab funktsiooni võrrandile sobiva graafiku;	Lisaks võib tugevamatele õpilastele soovitada TÜ Teaduskooli õppematerjali „Funktsioonidest ja nende graafikutest“ (autor Hilja Afanasjeva). Tähtis on graafikute skitseerimise oskus, sest seda on vaja 9., 10. ja 11. kursusel.
3) leiab valemiga esitatud funktsiooni määramispiirkonna, nullkohad, positiivsus- ja negatiivsuspiirkonna		4) lahendab positiivsus- ja negatiivsuspiirkondade leidmiseks võrratused, nullkohtade leidmiseks võrrandeid, kontrollib, kas funktsioon on paaris või paaritu,	Uuritakse parameetreid sisaldavaid funktsioone ning korratakse võrrandite, võrratuste ja nende süsteemide lahendamist.

algebraliselt; kontrollib, kas funktsioon on paaris või paaritu;		teab paaris- ja paaritute funktsioonide graafikute sümmeetrilisust; määramispiirkonna leidmisel teab ja oskab välja kirjutada võrratusi ning lahendada neid (nt $f(x) = m(x)/g(x) \Rightarrow g(x) \neq 0$, $f(x) = \sqrt[2k]{g(x)} \Rightarrow g(x) \geq 0$);	

Näiteülesanded

A: Leidke funktsioonide negatiivsuspiirkond.

$y(x) = 3x - x^2$

$m(k) = (k - 2)(3k + 1)$

B: Leidke taandamata ruutfunktsiooni korral kasvamis- ja kahanemisvahemikud ning ekstreemumid.

C: Leidke funktsiooni positiivsuspiirkond, kui $y(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{2x+1}$ ja $y(x) = \frac{2+x}{\sqrt{1-x^2}}$.

4) kirjeldab funktsiooni $y = f(x)$ graafiku seost funktsioonide $y = f(x) + a$, $y = f(x + a)$, $y = f(ax)$, $y = a f(x)$ graafikutega;	Funktsioonide $y = f(x)$, $y = f(x) + a$, $y = f(x + a)$, $y = f(ax)$, $y = a f(x)$ graafikud arvutil.	5) peegeldab graafikut *x*-teljest ja *y*-teljest, nihutab *a* ühiku võrra üles- ja allapoole, vasakule ja paremale, oskab kokku suruda ning venitada graafikut *a* korda, kirjeldab graafiku teisendusi funktsiooni valemi järgi;	GeoGebra järgi harjutatakse graafikute teisendamist liuguriga.

<table>
<tr><td colspan="4">Näiteülesanded

A: Kasutades funktsiooni $y = x^3$ graafikut, kirjeldage ja joonestage (arvutil) funktsiooni graafik $y = x^3 - 1$, $y = (x + 1)^3$, $y = 2x^3$. (L. Lepmann, T. Lepmann, K. Velsker)

B: Kirjeldage ja kujutage $y = f(x) + a; a > 0$.</td></tr>
<tr><td>5) selgitab arvjada, aritmeetilise ja geomeetrilise jada ning hääbuva geomeetrilise jada mõistet;</td><td>Arvjada mõiste, jada üldliige, jadade liigid. Aritmeetiline jada, selle omadused. Geomeetriline jada, selle omadused.</td><td>6) teab aritmeetilise ja geomeetrilise jada mõistet, leiab vahe ja teguri ning kirjeldab, kas jada on kasvav või kahanev;</td><td>Harjutatakse muutuja avaldamist valemist, geomeetrilise jada ülesannetes võrrandite vastavate poolte jagamise võtet ning korrutamise abivalemite rakendamist avaldisi tegurdades. Alati tasub küsida: kas võib ja miks võib?</td></tr>
<tr><td colspan="4">Näiteülesanded

A: 1. Avaldage a_1, d, n valemist $a_n = a_1 + d(n-1)$.
2. Leidke $a_7, kui\ a_n = n^2 + 3n$.

B: Kirjutage jada esimesed 6 liiget, kui a) $a_1 = 7, \quad a_{n+1} = a_n - 3$; b) $a_n = (-1)^n n$, c) $a_n = 3^{n-1}$. Määrake jada liik.

C: Antud on 5–7 jada elementi. Leidke nende põhjal jada üldliikme valem.</td></tr>
<tr><td>6) tuletab aritmeetilise ja geomeetrilise jada esimese n liikme summa ja hääbuva geomeetrilise jada</td><td>Aritmeetilise jada üldliikme valem ning esimese n liikme summa valem.</td><td>7) rakendab aritmeetilise ja geomeetrilise jada üldliikme valemeid, leiab aritmeetilise ja geomeetrilise jada esimese n</td><td>Korratakse võrrandisüsteemide ning lineaar- ja ruutvõrrandi lahendamist.</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>summa valemid, rakendab neid ning aritmeetilise ja geomeetrilise jada üldliikme valemeid ülesandeid lahendades;</td>
<td>Geomeetrilise jada üldliikme valem ning esimese n liikme summa valem.
Arvjada piirväärtus.
Piirväärtuse arvutamine.
Hääbuv geomeetriline jada, selle summa.</td>
<td>liikme summa ning hääbuva geomeetrilise jada summa;</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td colspan="4">Näiteülesanded

A: Geomeetrilise jada kolmas liige on 32, neljas liige on 8. Leidke jada kümnes liige ja esimese kümne liikme summa. Leidke kogu jada summa.

B: 1. Kasvava aritmeetilise jada neljanda ja esimese liikme jagatis on 7 ning kuuenda ja kolmanda liikme korrutis on 220. Leidke selle aritmeetilise jada esimene liige.
2. Leidke nende 7-ga jaguvate täisarvude summa, mis on arvude 1000 ja 2000 vahel. (A. Levin, T. Tõnso, A. Veelmaa)

C: Ülesanded, kus aritmeetilise jada elemente teisendades saadakse geomeetriline jada ja vastupidi, kusjuures lahendamiseks vajalike võrrandite või süsteemide keerukus ei saa ületada II kursusel omandatut.</td>
</tr>
<tr>
<td>7) selgitab jada piirväärtuse olemust ning arvutab piirväärtuse; teab arvude π ja e tähendust;</td>
<td>Arv e piirväärtusena.
Ringjoone pikkus ja ringi pindala piirväärtusena, arv π.</td>
<td>8) teab arvude π ja e tähendust piirväärtustena. Ringjoone pikkuse ja ringi pindala valemi tuletamise näitamine piirväärtuse järgi on väga tähtis;</td>
<td>Rõhutatakse, et arv e on Euleri arv ja naturaallogaritmi alus. Logaritmidega tutvuvad õpilased järgmises kursuses.
Arv π on Archimedese arv. Soovitatav on korraldada rühmatöö, millele järgnevad lühikesed ettekanded Eulerist, arvust π ja Archimedesest.</td>
</tr>
</table>

8) lahendab elulisi ülesandeid aritmeetilise, geomeetrilise ning hääbuva geomeetrilise jada põhjal.	Rakendusülesanded.	9) koostab ülesande teksti järgi matemaatilise mudeli. Harjutamise eesmärgil on hea kasutada eelmiste riigieksamite ülesandeid.	Tekstülesannete lahendamist ja mudeli koostamist saab jätkuvalt arendada 14. kursusel.
Näiteülesanne C: Kuulike lükatakse veerema mööda kaldpinda allapoole. Alates teisest sekundist veereb kuulike iga sekundiga eelmise sekundi jooksul läbitud teepikkusest ühe ja sama pikkuse võrra rohkem. Teise sekundi lõpuks on kuulikese kaugus lähtepunktist l_2 = 9 cm ja neljanda sekundi lõpuks on kuulike lähtepunktist kaugusel l_4 = 30 cm. Mitmenda sekundi lõpuks jõuab kuulike kaldpinna lõppu, mis asub lähtepunktist kaugusel L = 900 cm? (innove.ee riigieksamite materjalid)			

Ainesisene lõiming

Selles kursuses kasutatakse palju põhikoolis õpitut. See võimaldab õpilaste teadmisi ühtlustada ja õppimises tekkinud lünki täita. Funktsiooni omaduste tundmine on väga tähtis järgmisi kursusi õppides.

Lõiming teiste ainetega

Ajalugu. Arv π.
Elukestev õpe ja karjäär. Abstraktse ja loogilise mõtlemise areng.
Kultuuriline identiteet. Matemaatika ajalugu, Archimedes ja Euler.
Kodanikualgatus ja ettevõtlikkus. Rühmatöö ja paaristöö, koostööoskuste arendamine.
Väärtus ja kõlblus. Süstemaatilisuse, püsivuse, täpsuse, korrektsuse ja kohusetunde arendamine.

8. kursus

Eksponent- ja logaritmfunktsioon

Eesmärgid:

1) saavutada allkirjeldatud õpitulemused nii, et õpilane omandab tüüpülesandeid ning kergemaid mitterutiinseid ülesandeid lahendades õppekavas kirjeldatud oskused;
2) arendada õpitegevuse kaudu üld- ja ainepädevusi nii, et õpilane suudaks lahendada keerukamaid ülesandeid, mis võimaldaksid õppekavas kirjeldatud teadmisi ja oskusi rakendada väga heal tasemel.

Üld- ja ainepädevused:

1) suutlikkus kasutada vastavale alateemale omast keelt, sümboleid ning meetodeid. Selleks nõuda kirjalikus ja suulises eneseväljenduses distsiplineeritult mõistete ning keelesümboolika rakendamist;
2) suutlikkus arutleda loovalt ja loogiliselt, leida ülesande lahendamiseks sobivad strateegiad. Selleks käsitleda ülesannete lahendamise üldisi strateegiaid;
3) suutlikkus põhjendada ja tõestada oma mõttekäike, kusjuures tõestada mitte niivõrd väite tõesuse näitamiseks, kuivõrd aitamaks luua üksikteadmistes süsteemi;
4) suutlikkus analüüsida ja esitada alternatiive ning oskus teha valikuid. Selleks käsitleda üht ülesannet eri vaatenurkadest ning soodustada erinevate lahendusteede otsimist;
5) suutlikkus reflekteerida oma tegevust ning kriitiliselt hinnata tegevuse resultaati. Selleks peaks õpilane esitama iseendale küsimusi: mida ma teen; miks ma nii teen; milleni ma olen jõudnud ning kas tulemus on õige või vale ja kontrollitav.

Eelduskursused:

I kursus (tehted astemete ja juurtega);
VII kursus (funktsiooni määramis- ja muutumispiirkond, nullkohad, positiivsus- ja negatiivsuspiirkond, kasvamis- ja kahanemispiirkond).

Ülesannetega raskusaste:

A – tüüpilisi algoritme rakendav arvutus- või teisendusülesanne;
B – ühe- või kaheetapilise suhteliselt tuntud mudeli koostamise ja rakendamise ülesanne;
C – mitmeetapilise mudeli loomise ja rakendamise ülesanne.

<table>
<tr><th>Õpitulemused</th><th>Õppesisu</th><th>Oskuste ja teadmiste täpsustused</th><th>Soovitused</th></tr>
<tr><td>Õpilane:
1) selgitab liitprotsendilise kasvamise ja kahanemise olemust;
2) lahendab liitprotsendilise kasvamise ja kahanemise ülesandeid;</td><td>Liitprotsendiline kasvamine ja kahanemine.</td><td>Õpilane:
1) rakendab liitprotsendilise kasvamise (kahanemise) valemit tekstülesandeid lahendades (nt võib ülesanded siduda biomassi kasvamisega, hoiustega pangas, inimeste arvuga Maal jne);</td><td>Soovituste andmisel lähtume viimasest Koolibris ilmunud õpikust. Üldjuhul on õpiku A-osa ülesanded A- ja B-taseme ülesanded, õpiku B-osa ülesanded on B- ja C-taseme ülesanded.

Korratakse tehteid astmetega. Tuletatakse liitprotsendilise kasvamise (kahanemise) valem.

Kindlasti on vaja rääkida kiirlaenudest.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Näiteülesanded

A: Noorpaar otsustas teha endale puupulma (5 aastat) reisi. Plaanis on hoiustada algkapital, teades, et intressimäär aastas on 4,10% (BIGBANK). Kui suureks kasvab hoiustatud 1800 €?

B: Ameerika onu pärandas Antsule pangaarve, millel oli 9005 $. Mitu protsenti maksis see pank aastas intressi, kui on teada, et onu oli pannud 15 aastat tagasi panka 5000 $? (L. Lepmann, T. Lepmann, K. Velsker)

C: Leidke ajavahemik, mille vältel antud aine hulk kahekordistub (poolestub).</td></tr>
<tr><td>3) kirjeldab eksponentfunktsiooni, sh funktsiooni $y = e^x$, omadusi;</td><td>Eksponentfunktsioon, selle graafik ja omadused.</td><td>2) skitseerib funktsiooni $y = a^x$ graafiku, leiab määramis- ja muutumispiirkonna, kasvamis- ja kahanemisvahemiku jne;</td><td>Joonestatakse GeoGebraga graafikuid ja korratakse graafikute teisendusi. Pööratakse tähelepanu positiivsele muutumispiirkonnale. Seda tuleb hiljem rakendada eksponent- ja logaritmvõrrandites ning võrratustes.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4">

Näiteülesanded

A: Joonestage samas teljestikus graafikud ja võrrelge neid. (Pöörake tähelepanu sellele, et graafikud on sümmeetrilised, kui astme alused on pöördarvud.)

$y = 2^x, y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

$y = 5^x, y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$

$y = 3{,}5^x, y = \left(\frac{2}{7}\right)^x$

B: Joonestage ühte teljestikku graafikud $y = 1{,}5^x, y = 1{,}5^x + 2, y = 1{,}5^x - 3, y = 2 \cdot 1{,}5^x, y = 3^x$. Millist graafikut ei saa konstrueerida esialgse graafiku $y = 1{,}5^x$ abil? Tõestage seda algebraliselt.

C: Lahendage graafiliselt võrrand ja võrratus.

</td></tr>
<tr>
<td>4) selgitab arvu logaritmi mõistet ja selle omadusi; logaritmib ning potentseerib lihtsamaid avaldisi ja vahetab logaritmi alust;</td>
<td>Arvu logaritm. Kümnend- ja naturaallogaritm. Korrutise, jagatise ja astme logaritm. Logaritmimine ja potentseerimine. Üleminek logaritmi ühelt aluselt teisele.</td>
<td>3) rakendab avaldisi logaritmides ning potentseerides korrutise, jagatise ja astme logaritmi omadusi ning oskab üle minna logaritmi uuele alusele;</td>
<td>Kirjutatakse võrdust kasutades arvu astet ja arvu logaritmi: $2^3 = 8$ ja $3 = \log_2 8$. Harjutatakse logaritmi arvutamist taskuarvutil ning peast.

Võib uurida Johannes Kepleri (esimest korda kasutas sümboleid *log* ja *LOG*), John Napieri ja Henry Briggsi (logaritmide tabelite koostajate) elulugu.</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="4">

Näiteülesanded

A: $\log_2 N = 3,\ \log_2 8 = N,\ \log N = \log 4 + \log 10,\ \log N = \frac{1}{3}\log 8$

B: 1. Leidke arv *N*, kui log *N* = $\frac{1}{3}\log 4 + 2\log 5 - \log 10$. Logaritmige avaldist *N* alusel 3, kui $N = \sqrt[3]{\frac{5a^2}{b^4}}$ ning *a* ja *b* on positiivsed reaalarvud.

2. Minge üle sobivale alusele ja arvutage välja $\log_5 15, \log_4 10, \log_{0,1} 30$. Kasutage kalkulaatorit.

</td></tr>
<tr>
<td>5) kirjeldab logaritmfunktsiooni ja selle omadusi;
6) oskab leida eksponent- ja logaritmfunktsiooni pöördfunktsiooni;
7) joonestab eksponent- ja logaritmfunktsiooni graafikuid ning loeb graafikult funktsioonide omadusi;</td>
<td>Logaritmfunktsioon, selle graafik ja omadused. Pöördfunktsiooni mõiste eksponent ja logaritmfunktsiooni näitel.</td>
<td>4) leiab logaritmfunktsiooni määramispiirkonna
$y = \log_a N,\begin{cases} N > 0 \\ a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}.$</td>
<td>Skitseeritakse graafikuid $y = \log_2 x$, $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, $y = \log x$, $y = \ln x$.
Leitakse määramispiirkond, nullkohad, kasvamis- või kahanemispiirkond.</td>
</tr>
<tr><td colspan="4">

Näiteülesanded

A: Leidke funktsiooni $y = \log_3 x$ määramispiirkond, muutumispiirkond ja nullkoht. Leidke graafiku järgi funktsiooni väärtus kohal *x* = 0,5; *x* = 2; *x* = 6.

B: Leidke antud funktsiooni pöördfunktsioon, skitseerige antud funktsiooni ja pöördfunktsiooni graafik ühes teljestikus, kui $y = 4^x$, $y = \log_5 x$, $y = \log_3 x$.

</td></tr>
</table>

C: Leidke funktsiooni määramispiirkond a) $y=\log_{4-x}\left(25-x^2\right)$, b) $y=\log_{3-2x}(3x-2)$.			
8) lahendab lihtsamaid eksponent- ja logaritmvõrrandeid ning -võrratusi;	Eksponent- ja logaritmvõrrand, nende lahendamine. Rakendusülesandeid eksponent- ja logaritmvõrrandite kohta. Eksponent- ja logaritmvõrratus.	5) lahendab eksponentvõrrandeid logaritmimisvõttega; teisendab võrrandiks, mille mõlemad pooled on ühe ja sama arvu astmed, kasutab teguriteks lahutamise võtet; teisendab ruutvõrrandiks, kasutades abimuutujat; 6) lahendab logaritmvõrrandeid, mis lahenduvad logaritmi definitsiooni või omaduste järgi, teisendab võrrandi ruutvõrrandiks; kasutab erinevate logaritmi alustega logaritmvõrrandites üleminekut uuele alusele.	Harjutatakse erinevaid võtteid ning kontrollitakse lahendite õigust. Eksponent- ja logaritmvõrratusi lahendades kasutatakse eksponent- ja logaritmfunktsiooni omadust (kasvab või kahaneb). $3^{2x-1}\le 3^{x+6}\Leftrightarrow 2x-1\le x+6$; $\log_{0,3}(x-5)<\log_{0,3}4\Rightarrow x-5>4$. Õpilased lahendavad harjutustundides võrrandeid ja võrratusi, millel on küll olemas algebraline tulemus, kuid mitte sisuline vastus; samuti selliseid, mis ahvatlevad kasutama valet, kuigi näiliselt sobivat võtet; või sääraseid, kus vale lahendus annab õige tulemuse.
Näiteülesanded **A:** Lahendage võrrandid $\log_3\left(2x^2-23\right)=2$; $\log x+\log(x+1)=\log 6$; $3\log^2 x-5\log x+2=0$. (L. Lepmann, T. Lepmann, K. Velsker) **B:** Lahendage võrrandid $\log_2 x-\log_x 2=0$; $\log_2\log_3\log_4 x=0$, $2^{x+2}+2^{x-2}=34$. (A. Levin, T. Tõnso, A. Veelmaa)			

<table>
<tr><td colspan="4">C: 1. Lahendage võrratused $3^{5-2x} \le \sqrt{3}$; $\log(3x-1) - \log 6 > 0$.
2. Lahendage võrrand $\log_{81} x + \log_9 x + \log_3 x = 3{,}5$. (L. Lepmann, T. Lepmann, K. Velsker)</td></tr>
<tr><td>9) kasutab eksponent- ja logaritmfunktsioone reaalse elu nähtusi modelleerides ning uurides.</td><td>Elulised ülesanded.</td><td>Koostatakse teksti järgi matemaatiline mudel (graafik, võrrand või võrratus).</td><td>Leitakse rakendusi eksponent- ja logaritmfunktsioonile rahvastikuteaduses, füüsikas, bioloogias, rahanduses ja muudes eluvaldkondades.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Näiteülesanded

B: Streptokokkide bakterikultuur kasvab laboritingimustes eksponentsiaalselt kiirusega 3% minutis. Kui kiiresti bakterikultuur tuhatkordistub? Kui palju kasvab bakterikultuur tunni aja jooksul?

C: Koit Kogujal on 256 €, Lauri Laristajal 6561 €. Koguja suurendab iga aastaga oma rahasummat poole võrra, Laristaja vähendab kolmandiku võrra. Mitme aasta pärast on neil ühepalju raha? (A. Levin, T. Tõnso, A. Veelmaa)</td></tr>
</table>

Ainesisene lõiming

I kursus. Avaldised, astmed.
VII kursus. Funktsioonid.

Lõiming teiste ainetega

Bioloogia, inimeseõpetus, majandusõpe, füüsika. Liitprotsent, eksponent- ja logaritmfunktsioon, eksponent- ja logaritmvõrrandid.

Läbivad teemad kursuse vältel

Elukestev õpe ja karjäär. Abstraktse ja loogilise mõtlemise areng.
Kultuuriline identiteet. Matemaatika ajalugu, Johannes Kepler, John Napier, Henry Briggs; logaritmiline skaala (lükati).
Kodanikualgatus ja ettevõtlikkus. Rühmatöö ja paaristöö, koostööoskuste arendamine.
Väärtus ja kõlblus. Süstemaatilisuse, püsivuse, täpsuse, korrektsuse ja kohusetunde arendamine.

9. kursus

Trigonomeetrilised funktsioonid. Funktsiooni piirväärtus ja tuletis

Eesmärgid:
1) saavutada õpitulemused nii, et õpilane omandab tüüpülesandeid ning kergemaid mitterutiinseid ülesandeid lahendades õppekava;
2) õpilane tunneb trigonomeetriliste funktsioonide graafikuid, oskab lahendada trigonomeetrilisi võrrandeid. Antakse funktsiooni piirväärtuse ja tuletis mõiste. Õpilane teab tähtsamaid tuletise leidmise reegleid;
3) õpilane saab aru matemaatilisest keelest ja suudab esitada oma matemaatilisi mõttekäike, arutleb loovalt ning loogiliselt, leiab ülesande lahendamiseks sobivad strateegiad, suudab analüüsida ja esitada alternatiive, oskab teha valikuid ning rakendab omandatud teadmisi uudses olukorras.

Üld- ja ainepädevused:
1) suutlikkus kasutada vastavale alateemale omast keelt, sümboleid ning meetodeid. Selleks nõuda kirjalikus ja suulises eneseväljenduses distsiplineeritult mõistete ning keelesümboolika rakendamist;
2) suutlikkus arutleda loovalt ja loogiliselt, leida ülesande lahendamiseks sobivad strateegiad. Selleks käsitleda ülesannete lahendamise üldisi strateegiaid;
3) suutlikkus analüüsida ja esitada alternatiive ning oskus teha valikuid. Selleks käsitleda üht ülesannet eri vaatenurkadest ja soodustada erinevate lahendusteede otsimist.

Eelduskursused: matemaatika lai I–V, VII ja VIII kursus.

Ülesannete raskusaste:
A – tüüpilisi algoritme rakendav arvutus- või teisendusülesanne;
B – ühe- või kaheetapilise suhteliselt tuntud mudeli koostamise ja rakendamise ülesanne;
C – mitmeetapilise mudeli loomise ja rakendamise ülesanne.

Õpitulemused	Õppesisu	Oskuste ja teadmiste täpsustused	Soovitused
Õpilane: 1) selgitab funktsiooni perioodilisuse mõistet; 2) leiab siinus-, koosinus- ja tangensfunktsiooni perioodi; 3) oskab leida taskuarvutil arcsin m, arccos m, arctan m;	Funktsiooni perioodilisus. Mõisted arcsin m, arccos m, arctan m;	Õpilane: 1) oskab leida trigonomeetriliste funktsioonide (nt $y = \sin kx$, $y = \cos kx$, $y = \tan kx$) perioodi nii algebraliselt kui ka graafiku järgi;	Soovitusi andes lähtume käibivast õpikust (autorid Lea ja Tiit Lepmann, Kalle Velsker). Üldjuhul on õpiku A-osa ülesanded A- ja B- taseme ülesanded, õpiku B-osa ülesanded on B- ja C-taseme ülesanded.
4) joonestab siinus-, koosinus- ja tangensfunktsiooni graafikuid ning loeb graafikuilt funktsioonide omadusi; 5) joonestab trigonomeetriliste funktsioonide $y = f(x) + a$, $y = f(x + a)$, $y = f(ax)$, $y = af(x)$ graafikuid ning loeb graafikuilt funktsioonide omadusi;	Siinus-, koosinus- ja tangensfunktsiooni graafikud ning omadused.	2) joonestab õppekavaga määratud funktsioonide graafikuid ning kirjeldab graafiku põhjal funktsiooni omadusi (määramispiirkonnast kuni kasvamis- kahanemisvahemikeni); 3) kasutab paaris- ja paaritu funktsiooni tunnust; 4) määrab funktsiooni muutumispiirkonna ning leiab perioodi pikkuse (sobib ka graafiku järgi).	Õpilane oskab käsitleda funktsiooni etteantud lõigul. Soovitame konstrueerida ka funktsiooni $y = \|f(x)\|$ graafiku ning kirjeldada selle omadusi.

Näiteülesanded

A: Joonestage funktsiooni $y = \sin x$ graafik, kui $x \in [-\pi; \pi]$, ning leidke selle funktsiooni nullkohad ja ekstreemumkohad.

B: 1. Joonestage funktsiooni $y = \sin 2x$ graafik. Kirjutage välja selle funktsiooni nullkohad ja positiivsuspiirkond, kui $x \in (-\pi; \pi)$.
2. Joonestage funktsiooni $y = 2\cos 2x$ graafik. Kirjutage välja selle funktsiooni muutumispiirkond, nullkohad, kasvamis- ja kahanemisvahemikud, kui $x \in (-\pi; \pi)$.

C: 1. Joonestage funktsiooni $y = \cos x - 1$ graafik. Kirjutage välja selle funktsiooni muutumispiirkond, nullkohad, positiivsus- ja negatiivsuspiirkonnad, kasvamis- ja kahanemisvahemikud, kui $x \in [0; 2\pi]$. Lisage joonisele funktsiooni $y = \sin x$ graafik ning leidke nende kahe funktsiooni ühine kasvamispiirkond.

2. Vaadelge funktsiooni $f(x) = 2\sin x - 1$ lõigul $[0;\ 2\pi\ ]$.

1) Joonestage funktsiooni $f(x)$ graafik ja lahendage selle järgi võrrand $f(x) = 0$.

2) Moodustage avaldis $f(\pi - x) + f(\pi + x)$ ja lihtsustage seda.

6) leiab lihtsamate trigonomeetriliste võrrandite üldlahendid ja erilahendid etteantud piirkonnas;	Lihtsamad trigonomeetrilised võrrandid.	Võrrandi lahendamiseks on tarvis enne võrrandit lihtsustada, kasutades õppekavaga määratud valemeid. Võrrandite lahendamisel aktseptitakse nii algebralisel moel kui ka funktsiooni graafiku järgi saadud lahendeid ning tavaliselt leitakse lahendid etteantud piirkonnas. Ruutvõrrandiks taanduv trigonomeetriline võrrand on kõrgeim nõutav tase.	Korratakse eelmisel õppeaastal omandatud trigonomeetriliste avaldiste lihtsustamist ja algebraliste võrrandite lahendamise võtteid. Avaldiste lihtsustamisega õpitakse paari sammu ettenägemise kunsti.

Näiteülesanded

A: Lahendage võrrand $2\sin x - \sqrt{3} = 0$, kui $x \in [0; 2\pi]$.

B: 1. Vaadelge funktsioone $f(x) = sin\ 2x$ ja $g(x) = sin\ x$ lõigul $[0\ ;\ 2\pi\ ]$. Lahendage võrrand $f(x) = g(x)$.

2. Lahendage võrrandid antud lõigul.

$(\sin x - 1)(\tan x + 1) = 0$; $[-\pi; 2\pi]$

<table>
<tr><td colspan="4">

$\cos(\pi - x) = \sin\frac{\pi}{2}$; $[0;3\pi]$
$8\sin^2 x + 2\cos x - 7 = 0$; $[-\pi;\ 2\pi]$

C: Piirkonnas $0 \le x \le 2\pi$ vaadelge funktsioone $f(x) = \sqrt{2}\cos x$ ja $g(x) = \tan x$.
1. Lahendage võrrand $f(x) = g(x)$.
2. Joonestage funktsioonide $f(x) = \sqrt{2}\cos x$ ja $g(x) = \tan x$ graafikud ning märkige eelmises punktis leitud lahendid joonisele.
3. Lisage joonisele funktsiooni $y = |f(x)|$ graafik.
</td></tr>
<tr><td>7) lahendab lihtsamaid trigonomeetrilisi võrratusi;</td><td></td><td>Võrratusi lahendatakse etteantud lõigul graafikut kasutades.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4">

Näiteülesanded

A: 1. Lahendage võrratus $2\sin x - 1 > 0$ lõigul $[0;\ 2\pi]$ (ehk lahendage võrratus $\sin x > 0{,}5$).
2. Lahendage lõigul $[0;\ 2\pi]$ võrratused $\cos x < 1$, $\sin x \ge 0$, $\cos x < 0{,}5$.

B: Vaadelge funktsioone $f(x) = \sin x$ ja $g(x) = \cos x$ lõigul $[0;\ 2\pi]$.
1. Joonestage ühes ja samas teljestikus funktsioonide $f(x)$ ja $g(x)$ graafikud.
2. Leidke joonise järgi x väärtused, mille korral $f(x) > g(x)$.
Kui nende funktsioonide valemitesse lisada kordajaid, saame juba C-taseme ülesande.

C: Lahendage võrratus $0{,}5 < \cos x < 1$ lõigul $[0;\ 3\pi]$.
</td></tr>
<tr><td>8) selgitab funktsiooni piirväärtuse mõistet ja arvutab selle lihtsamal juhul;</td><td>Funktsiooni piirväärtus ja pidevus. Argumendi muut ja funktsiooni muut. Hetkkiirus.</td><td>Piirväärtuse leidmisel ei tohi minna liiga tehniliseks, vaid rõhuda rohkem arusaamisele. Õpilane leiab funktsiooni piirväärtuse, lõpmatu</td><td>Piirväärtuse mõiste on oluline funktsiooni tuletise mõisteni jõudmisel. Piisab õpikus (Lea ja Tiit Lepmann, Kalle Velsker) toodud ülesannetega näidatud tasemest.</td></tr>
</table>

9) selgitab tuletise mõistet ning tuletise füüsikalist ja geomeetrilist tähendust; 10) rakendab funktsioonide summa, vahe, korrutise ja jagatise tuletise leidmise eeskirja; 11) leiab funktsiooni esimese ja teise tuletise.	Funktsiooni graafiku puutuja tõus. Funktsiooni tuletise mõiste. Funktsiooni tuletise geomeetriline tähendus. Funktsioonide summa ja vahe tuletis. Kahe funktsiooni korrutise tuletis. Astmefunktsiooni tuletis. Kahe funktsiooni jagatise tuletis. Trigonomeetriliste funktsioonide tuletised. Eksponent- ja logaritmfunktsiooni tuletis. Tuletiste tabel. Funktsiooni teine tuletis. Liitfunktsioon. Liitfunktsiooni tuletis.	piirväärtuse ja piirväärtuse lõpmatuse kohal. Selles kursuses kasutatakse küll puutuja tõusu teema arendamiseks, kuid rakendamisega tegeldakse järgmises kursuses. Oluline on klassis tuletada summa, vahe, korrutise, jagatise ja astmefunktsiooni tuletise leidmise reeglid. Funktsiooni tuletiste tabeli rakendamiseks tuleb teha ka rutiinset tööd. Liitfunktsiooni mõistet pole varem kasutatud. Seda on vaja selgitada mõlemat pidi (liitfunktsiooni kokkupanemine ja lahtiharutamine). Alles pärast mõiste omandamist saab leida tuletist.	Vaadeldakse piirväärtuse tähendust juba tuntud funktsioonide korral. Näiteks võib leida piirväärtuse kohal $x = 0$, $x=2$, $x=\infty$ funktsioonidele $y=x^2-4$, $y=x^3+2x+3$, $y=\frac{1}{x}$. Viimase funktsiooni põhjal võib selgitada ühe- ja kahepoolse piirväärtuse tähendust, piirväärtust kohal 0 ning piirväärtust lõpmatuse kohal. Kui tundub, et tuletise leidmine muutub õpilastele igavaks, siis seotakse tuletise leidmine võrrandite või võrratuste lahendamise ning funktsiooni väärtuste arvutamisega etteantud kohal. Nt lahendage võrrand $f'(x)=0$, lahendage võrratus $f'(x)>0$ või leidke $f''(5)$, andes ette erinevaid funktsioone. Sel moel valmistutakse järgmiseks kursuseks. Õpetaja saab otsustada, kas toob teise tuletise leidmise sisse selles kursuses või jõuab selleni alles järgmises kursuses kumerus- ja nõgususpiirkonna leidmisel.

			Tuleks tutvustada liitfunktsioone Y = sin 2x, y = cos 2x, $y = e^{-x}$ ja $y = e^{x-2}$ ning leida nende tuletist. Soovitame leida y = sin 2x ja y = cos 2x tuletist liitfunktsiooni tuletise reeglit kasutades ning korrutise reegli järgi. Õpilased peaksid nägema, mis võte on lihtsam, samas ka kogema, et mõlemal moel jõuab sihile.

Näiteülesanded

A: Leidke funktsioonide $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2{,}5x^2+6x+14$, $g(x)=x\cdot\sin x$ ja $h(x)=\frac{\sin x}{2x}$ tuletised.

B: 1. Leidke funktsioonide $f(x)$ ja $g(x)$ tuletised, kui $f(x)=\frac{2\cos x-1}{\cos x}$ ja $g(x)=x^2(1-\ln x)$.

2. Lahendage võrratus $f'(x)>0$, kui $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-12x-27$.

3. Leidke $f''(5)$, kui $f(x)=x^3-5x^2+3x-11$.

C: Leidke $f'(x)$, kui $f(x)=\cos^2 x+\sin 2x$.

Lõiming

Selles kursuses kasutatakse palju 10. klassis õpitut. See võimaldab õpilaste teadmisi ühtlustada ja õppimises tekkinud lünki täita. Samaaegu on selle kursuse materjal väga tähtis järgmise kursuse õppimisel.

Perioodilist funktsiooni kasutatakse teisteski ainetes (füüsikas, bioloogias jne).

10. kursus

Tuletise rakendused

Eesmärgid:

1) õpilane oskab tuletise järgi uurida funktsioone ning lahendada ekstreemumülesandeid;
2) funktsioonidega (eeskätt funktsiooni ekstreemumiga) seotud ülesannete lahendamise kaudu õpitakse uurima objekti muutusi, mille on põhjustanud erinevad parameetrid, hindama riske ning otsima optimaalseid lahendusi. Ühele ülesandele erinevate lahendusteede leidmine arendab paindlikku mõtlemist ja ideede genereerimise oskust.

Üld- ja ainepädevused: suutlikkus kasutada vastavale alateemale omast keelt, sümboleid ning meetodeid. Selleks nõuda kirjalikus ja suulises eneseväljenduses distsiplineeritult mõistete ning keelesümboolika rakendamist.

Eelduskursused: matemaatika lai I–V, VII, VIII ja IX kursus.

Ülesannete raskusaste:

A – tüüpilisi algoritme rakendav arvutus- või teisendusülesanne;
B – ühe- või kaheetapilise suhteliselt tuntud mudeli koostamise ja rakendamise ülesanne;
C – mitmeetapilise mudeli loomise ja rakendamise ülesanne.

Õpitulemused	Õppesisu	Oskuste ja teadmiste täpsustused	Soovitused
Õpilane: 1) koostab funktsiooni graafiku puutuja võrrandi;	Puutuja tõus. Joone puutuja võrrand.	Õpilane eristab jooni ja joonte lõikepunkte (5. kursus). Varasemast tunneb õpilane üksnes ringjoone puutujat. Nüüd peab ta aru saama, et räägime ainult funktsiooni graafiku puutumisest antud punktis (mõnes teises punktis on saadud sirge lõikaja). Õpilane peab mõistma, et puutuja võrrand on sirge võrrand punkti ja tõusu kaudu	Soovitusi andes lähtume Lea ja Tiit Lepmanni ning Kalle Velskeri koostatud õpikust. Üldjuhul on õpiku A-osa ülesanded A- ja B-taseme ülesanded, õpiku B-osa ülesanded on B- ja C-taseme ülesanded. Puutuja võrrandi koostamisel tuleb lähtuda kolmest võimalusest: antud on puutepunkti abstsiss, antud on

<table>
<tr><td></td><td></td><td>– ainult tõusu leidmise võimalused on täienenud.</td><td>puutepunkti ordinaat, antud on puutuja tõus otseselt (tõus on näiteks 3) või kaudselt (on mingi sirgega paralleelne või risti). Tublimad õpilased võivad koostada ka puutuja võrrandi läbi punkti, mis ei asu etteantud joonel.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Näiteülesanded

A: On antud funktsioon f (x) =$x^3 - 3x^2 + 2$. Koostage võrrand joone f (x) puutujale punktis (2; 6).

B: Antud on funktsioon $y = x^3 - 3x^2 + 3$. Leidke funktsiooni graafikule joonestatud puutujate tõusud punktides, mille ordinaat on 3.

C: 1. Funktsiooni $y = \frac{x^3}{3} + x^2 + \frac{7}{3}$ graafikule on joonestatud puutuja paralleelselt sirgega $y = -x + 15$. Leidke puutepunkti koordinaatide summa.
2. Leidke paraboolile $y = x^2 + bx + c$ kordajad b ja c nii, et sirge $y = x$ puutuks parabooli punktis $M(3;\ 3)$.
3. Näidake, et paraboolidel $y_1 = 3x^2 - 5x - 2$ ja $y_2 = 2x^2 - x - 6$ on ühises punktis ühine puutuja.</td></tr>
<tr><td>2) selgitab funktsiooni kasvamise ja kahanemise seost funktsiooni tuletise märgiga, funktsiooni ekstreemumi mõistet ning ekstreemumi leidmist;
3) leiab funktsiooni kasvamis- ja kahanemisvahemikud, ekstreemumid; funktsiooni graafiku</td><td>Funktsiooni kasvamis- ja kahanemisvahemik; funktsiooni ekstreemum; ekstreemumi olemasolu tarvilik ja piisav tingimus. Funktsiooni suurim ja vähim väärtus lõigul. Funktsiooni graafiku kumerus- ja nõgususvahemik, käänupunkt. Funktsiooni uurimine</td><td>Funktsiooni uurimine tähendab kohtade ja piirkondade leidmist, s.o määramispiirkonna, nullkohtade, positiivsus- ja negatiivsuspiirkonna, ekstreemumkohtade, kasvamis- ja kahanemisvahemike, käänukohtade, kumerus- ja nõguspiirkonna leidmist.

Funktsiooni uurimisele lisaks võib küsida ekstreemumkohtade liigi määramist, ekstreemumpunktide</td><td>Õpilastele tuleb selgitada mõistete ekstreemumkoht, ekstreemumpunkt ja ekstreemum erinevust ning nõuda neilt sõnade õiget kasutamist (samuti nullkoht, nullpunkt, käänukoht, käänupunkt).

Kuna varem on õpitud funktsiooni omadusi graafikult lugema, siis nüüd pannakse analüütiline ja geomeetriline tähendus kokku.</td></tr>
</table>

kumerus- ja nõgususvahemikud ning käänupunkti; 4) uurib ainekavas etteantud funktsioone täielikult ja skitseerib funktsiooni omaduste põhjal graafiku;	tuletise järgi. Funktsiooni graafiku skitseerimine funktsiooni omaduste põhjal.	koordinaate, käänupunkte jne. Neid on eriti vaja graafikute skitseerimisel. Graafiku skitseerimiseks võib vahemiku või lõigu ette anda ning kindlasti tasub õpilastel oma lahendust IKT vahenditega kontrollida. Ekstreemumkoha liigi määramise olulisuse rõhutamiseks võiks klassis vaadelda ka mõnda katkevat funktsiooni.	Ekstreemumkoha liigi määramiseks võib kasutada tabelit (tuletise märgi muutuste kohta), tuletisfunktsiooni graafikut (selle tõlgendamine), teist tuletist, esitatud funktsiooni graafikut (nt $y=2x^2-x-6$ puhul peaks õpilane aru saama, et funktsioonil on ainult miinimumpunkt ja funktsioonil $y=\log_2(x-3)$ ekstreemumpunkt puudub) ning **pideva** funktsiooni korral funktsiooni väärtusi. Tublimad õpilased võivad koostada asümptootide võrrandeid ja uurida katkevat funktsiooni.

Näiteülesanded

A. Leidke funktsiooni $f(x)=x^3-6x^2+9x$ ekstreemumpunktid ja kahanemisvahemik.

B: 1. Antud on funktsioon $y=x^3-3x$.

1) Leidke funktsiooni nullkohad.
2) Leidke funktsiooni kasvamis- ja kahanemisvahemikud.
3) Leidke funktsiooni graafiku maksimum- ja miinimumpunkti koordinaadid.
4) Joonestage funktsiooni $y=x^3-3x$ graafik.
5) Kirjutage välja antud funktsiooni positiivsuspiirkond.

2. On antud funktsioon $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}$.

1) Leidke funktsiooni nullkohad ja negatiivsuspiirkond.
2) Leidke funktsiooni graafiku maksimum- ja miinimumpunkt.
3) Leidke funktsiooni käänupunkt, kumerus- ja nõgususpiirkond.

<table>
<tr><td colspan="4">4) Skitseerige funktsiooni graafik lõigul [−2; 3].

C: 1. Leidke funktsiooni $y = 8x^3 - x^4$ ekstreemumkohad ja määrake nende liik.
2. Leidke funktsiooni $y = 0,5x^2 - \ln x$ ekstreemumpunkti koordinaadid ja kasvamispiirkond.</td></tr>
<tr><td>5) leiab funktsiooni suurima ja vähima väärtuse etteantud lõigul;
6) lahendab rakenduslikke ekstreemumülesandeid.</td><td>Ekstreemumülesanded. Funktsiooni tuletise kasutamise rakendusülesandeid.</td><td>Õpilane leiab funktsiooni suurima ja vähima väärtuse lõigul nii algebraliselt kui ka graafikut kasutades.

Ekstreemumkohtade leidmisele taanduvaid ülesandeid nimetatakse ekstreemumülesanneteks. Õpilane omandab ekstreemumülesande lahendamise põhimõtte:
1) koostatakse ühe muutuja funktsioon otsitavast lähtudes;
2) leitakse funktsiooni ekstreemumkoht (-kohad);
3) määratakse ekstreemumkoha liik (kontroll) ja sõnastatakse vastus.

Ekstreemumülesannete temaatika: planimeetria, stereomeetria, majandus, punkti kaugus joonest.</td><td>Alustatakse tuttavate funktsioonide graafikute lugemisest erinevatel lõikudel, nt sirgel (kasvav või kahanev), paraboolil (ainult kasvamispiirkonnas või kahanemispiirkonnas või sellisel lõigul, kuhu jääb ka haripunkt), kuupfunktsiooni graafikul (palju võimalusi). Pärast graafikute uurimist jõutakse arusaamisele, et kõigepealt tuleb leida need ekstreemumkohad, mis jäävad antud lõiku, ning võtta lisaks vaatluse alla ka lõigu otspunktid. Pärast funktsiooni väärtuste arvutamist nendel kohtadel saame valida vähima või suurima või mõlemad. See teema on väga tähtis tuletist rakendades.

Õpilaste jaoks on kõige raskem õige ühe muutujaga funktsioonini jõudmine. Selleks peab esmalt välja kirjutama otsitava suuruse valemi nii mitme muutujaga kui parajasti vaja (silindri täispindala, kuubi ruumala, rööpküliku pindala jne), edasi tuleb leida seosed esinevate muutujate vahel kas tekstist või joonisel ning teha vastavad asendused – saame otsitava funktsiooni (valemi).</td></tr>
</table>

			Järgneb ekstreemumülesande lahendamine ja kontroll.

Näiteülesanded

A: 1. Leidke funktsiooni $y = 2x - 7$ suurim väärtus lõigul [–1; 3].

2. Leidke funktsiooni $y = -x + 0{,}7$ suurim väärtus lõigul [–1; 3].

B: 1. Antud on funktsioon $y = x^3 - 5x^2 + 3x + 7$. Arvutage funktsiooni vähim väärtus lõigul $[2;\ 4]$.

2. Leidke funktsiooni $y = \log_2(x+7)$ suurim ja vähim väärtus lõigul [1; 9].

3. Karlil on 400 meetri pikkune elektrikarjuse komplekt. Tema plaan on ümbritseda sellega võimalikult suure pindalaga ristkülikukujuline karjamaa kolmest küljest (neljandaks küljeks on jõgi). Mis mõõtmetega karjamaa peaks Karl tegema?

4. Ristkülikukujulise plekitüki külgede pikkused on 15 cm ja 24 cm. Tüki igast nurgast lõigatakse ära ühesugused ruudud. Tekkinud plaat vormitakse pealt lahtiseks karbiks, mille servad tinutatakse kokku. Millised peaksid olema äralõigatavad tükid, et karbi ruumala oleks võimalikult suur? (Hilja ja Jüri Afanasjev jne)

C: 1. Korrapärase nelinurkse prisma kolme mõõtme summa on 6 m. Millise prisma põhiserva pikkuse korral on prisma ruumala suurim?

2. Risttahuka põhjaks on ruut. Missugused peavad olema risttahuka mõõtmed, et selle ruumala oleks suurim, kui risttahuka ühe põhja pindala ja külgpindala summa on 108 cm^2?

Lõiming

Ressursside säästev kasutamine (optimaalsete lahenduste otsimine ekstreemumülesandeid lahendades); reaalse eluga seotud majandusülesannete lahendamine; ainesisene lõiming planimeetriaga ja stereomeetriaga.

11. kursus

Integraal. Planimeetria

Eemärgid:

1) saavutada allkirjeldatud õpitulemused nii, et õpilane omandab tüüpülesandeid ning kergemaid mitterutiinseid ülesandeid lahendades õppekavas kirjeldatud oskused;
2) arendada õpitegevuse kaudu üld- ja ainepädevusi nii, et õpilane suudaks lahendada keerukamaid ülesandeid, mis võimaldaksid õppekavas kirjeldatud teadmisi ja oskusi rakendada väga heal tasemel.

Üld- ja ainepädevused:

1) suutlikkus kasutada alateemale omast keelt, sümboleid ning meetodeid. Selleks nõuda kirjalikus ja suulises eneseväljenduses distsiplineeritult mõistete ning keelesümboolika rakendamist;
2) suutlikkus arutleda loovalt ja loogiliselt ning leida ülesande lahendamiseks sobivad strateegiad. Selleks käsitleda ülesannete lahendamise üldisi strateegiaid;
3) suutlikkus põhjendada ja tõestada oma mõttekäike, kusjuures tõestada mitte niivõrd väite tõesuse näitamiseks, kuivõrd aitamaks luua üksikteadmistes süsteemi;
4) suutlikkus analüüsida ja esitada alternatiive ning oskus teha valikuid. Selleks käsitleda üht ülesannet eri vaatenurkadest ja soodustada erinevate lahendusteede otsimist;
5) suutlikkus reflekteerida oma tegevust ning kriitiliselt hinnata tegevuse resultaati. Selleks peaks õpilane esitama iseendale küsimusi: mida ma teen; miks ma nii teen; milleni ma olen jõudnud ning kas tulemus on õige ja kontrollitav.

Eelduskursused: matemaatika lai

I kursus (avaldiste lihtsustamine);
II kursus (võrrandite ja võrrandisüsteemide lahendamine);
III kursus (täisnurkse kolmnurga lahendamine);
IV kursus (trigonomeetriliste avaldiste lihtsustamine ja üldise kolmnurga lahendamine);
V kursus (joonte lõikepunktide leidmine);
VII kursus (astmefunktsiooni graafikud);
VIII kursus (eksponent- ja logaritmfunktsioon);
IX kursus (trigonomeetrilised funktsioonid, tuletise leidmine);
X kursus (tuletise rakendused);
lisaks põhikooli õppekavas kirjeldatud teadmised tasandilistest kujunditest.

Ülesannete raskusaste:

A – tüüpilisi algoritme rakendav arvutus- või teisendusülesanne;
B – ühe- või kaheetapilise suhteliselt tuntud mudeli koostamise ja rakendamise ülesanne;

C – mitmeetapilise mudeli loomise ja rakendamise ülesanne.

<table>
<tr><th>Õpitulemused</th><th>Õppesisu</th><th>Oskuste ja teadmiste täpsustused</th><th>Soovitused</th></tr>
<tr><td>Õpilane:
1) saab aru, et tuletise leidmisel ehk diferentseerimisel on pöördoperatsioon – integreerimine;
2) selgitab algfunktsiooni mõistet;
3) leiab lihtsamate funktsioonide määramata integraale põhiintegraalide tabeli ja integraali omaduste järgi;</td><td>Algfunktsiooni ja määramata integraali mõiste. Integraali omadused.</td><td>Selgitusi võib pidada piisavaks, kui õpilane oskab põhjendada, et näiteks $F(x)=x^4+x^2-7$ on funktsiooni $f(x)=4x^3+2x$ algfunktsioon, sest $F'(x)=f(x)$.

Integraali leidmise harjutamiseks sobivad väga hästi õpiku ülesanded, mis nõuavad enne integreerimist nii algebralise kui ka trigonomeetrilise avaldise lihtsustamist (kordab eelnevat ja seob teemasid).</td><td>Soovitusi andes lähtume käibivast õpikust. Lisaks võib tutvuda TÜ Teaduskooli õppematerjaliga „Integraal“, mille on koostanud Hilja Afanasjeva.

Kursust tuleks alustada kordamisest: tuletada meelde elementaarfunktsioonide graafikud, nende omadused, funktsiooni tuletise leidmine ning selle mõningad rakendused. Siit saab esitada küsimuse, kas tuletise järgi on võimalik ära arvata esialgse funktsiooni valemit. Saame näidata, et äraarvamine õnnestub ainult teatud juhtudel. Ülesandeid lahendades kasutame integraalide tabelit, milleni jõudmist saab algfunktsiooni järgi näidata. Ülesannete lahenduste kontrollimiseks võib kasutada arvutiprogramme.

Õpikus toodud muutuja vahetuse võttega integreerimine on kehtivast õppekavast väljas, kuid võtet võib tutvustada tugevamatele õpilastele.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Näiteülesanded

A: Leidke määramata integraal $\int(4x^5+2x^{-3})dx$, $\int(u+2)(u^2-2u)du$, $\int\frac{x^2-9}{x+3}dx$.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="4">

B: Leidke määramata integraal $\int \frac{2x^2+10x+12}{x+3}dx$, $\int \frac{(2x-5)^2}{x^2}dx$, $\int \frac{\cos^2 x}{1-\sin x}dx$, $\int \frac{e^{2x}-2\cdot e^x-3}{e^x-3}dx$.

C: Lähtudes edasisest rakendamise tasemest, pole tehniliselt keerukamaid avaldisi vaja integreerida.

</td></tr>
<tr>
<td>4) selgitab kõvertrapetsi mõistet;
5) rakendab Newtoni-Leibnizi valemit määratud integraali leides;</td>
<td>Kõvertrapets, selle pindala piirväärtusena. Määratud integraal, Newtoni-Leibnizi valem.</td>
<td>Õpilane peab aru saama, et kõvertrapets ei pea olema üldse trapets, kuna tal on palju erijuhte. Arusaamise kontrollimiseks võib lasta kõvertrapetseid joonistada või etteantud funktsioonide graafikutega (neid võib olla rohkem) piiratud tasandiosi viirutada (siin ka tähelepanu ja lugemisoskuse kontroll).</td>
<td>Kõvertrapetsi mõistet saab hästi selgitada joonistega. Lisaks Archimedese kombel pindala arvutamisele võiks uuesti kasutada V kursusel valminud jooniseid joonte lõikepunktide leidmiseks. Kohe saab tekitada vajaduse (püstitada probleemi) kahe joone poolt piiratud kujundi pindala arvutamiseks. Tuleb märgata erinevust lihtsalt määratud integraali arvutamisel ja pindala arvutamisel.</td>
</tr>
<tr><td colspan="4">

Näiteülesanded

A: Leidke $\int_{-1}^{2}(x^3-x^2+3)dx$, $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\sin x\,dx$, $\int_{0}^{1}(e^{x-2}-4x)dx$.

B: Leidke $\int_{0}^{0,5\pi}(\sin x+\cos x)^2dx$; $\int_{-3}^{-2}\frac{2x^2+5x-3}{3x+9}dx$; $\int_{2}^{4}\pi[f(x)]^2dx$, kui $f(x)=3x-x^2$.

C: Leidke määratud integraal lõigul [–1; 1], kui $f(x)=\begin{cases}-3;\ kui\ x>0\\ x-3,\ kui\ x\le 0\end{cases}$.

</td></tr>
</table>

6) arvutab määratud integraaliga kõvertrapetsi pindala, mitmest osast koosneva pinnatüki ja kahe kõveraga piiratud pinnatüki pindala; 7) arvutab lihtsama pöördkeha ruumala;	Integraali kasutamine tasandilise kujundi pindala, pöördkeha ruumala ning töö arvutamisel.	Oskuse kinnistamiseks sobivad õpiku A- ja B-osa joonistega ülesanded – joonis on alati toeks. Pöördkeha ruumala arvutamise ülesanded on õpikus pöördkehade teema juures.	Õpetaja saab joontega piiratud kujundi pindala arvutamiseks kasutada kogu eelnevate kursuste jooniste varamu, juhtides tähelepanu varem õpitud oskuste rakendamisele (mida ja milleks oleme õppinud). Funktsioonide graafikute joonestamine seotakse võrrandisüsteemide lahendamise, integreerimise ja arvutamise vastuse kriitilise hindamisega. Töö arvutamine integraaliga ei ole nõutud oskus, kuid teemat võib soovitada füüsikast huvitunud õpilastele iseseisvaks tööks.

Näiteülesanded

A: Leidke antud joontega piiratud kujundi pindala: a) $y=-2x^2+7x-3$, $y=0$; b) $y=0$, $y=x^2-4$, $x=4$, $x=3$; c) $y=x^2-3$, $y=x-1$ ja y-telg.

B: 1. Leidke joontega $y=-x^2+6x-3$ ja $y=x^2-4x+5$ piiratud kujundi pindala.

2. Leidke joontega $y=0$, $y=x^2-4$, $x=1$, $x=3$ piiratud kujundi pindala.

3. Leidke joontega $y=8x$, $y=\frac{1}{x^2}$ ja $y=x$ piiratud kujundi pindala. Skitseerige joonis.

C: 1. Tasandilise kujundi tipud asuvad punktides $A(-1;\ 0)$, $B(13;\ 0)$ ja $C(-3;\ 8)$, kusjuures AB ja BC on sirglõigud ning punkte A ja C läbib parabool $y=x^2+ax+b$. Leidke kujundi ABC pindala. Leidke erinevaid lahendusviise.

2. Joontega $y=x^2$ ja $y=m$ piiratud kujundi pindala on 36. Leidke parameetri m väärtus.

8) selgitab geomeetriliste kujundite ja nende elementide omadusi, kujutab vastavaid kujundeid joonisel; uurib IKT vahenditega geomeetriliste kujundite omadusi ning kujutab vastavaid kujundeid joonisel;	Kolmnurk, selle sise- ja välisnurk, kolmnurga sisenurga poolitaja, selle omadus. Kolmnurga sise- ja ümberringjoon. Kolmnurga mediaan, mediaanide omadus. Kolmnurga kesklõik, selle omadus. Meetrilised seosed täisnurkses kolmnurgas. Hulknurk, selle liigid. Kumera hulknurga sisenurkade summa. Hulknurga sise- ja ümberringjoon. Rööpkülik, selle liigid ja omadused. Trapets, selle liigid. Trapetsi kesklõik, selle omadused. Kesknurk ja piirdenurk. Thalese teoreem. Ringjoone lõikaja ning puutuja. Kõõl- ja puutujahulknurk. Kolmnurga pindala.	Kolmnurk – mis tingimustel on määratud, liigitus külgede ja nurkade järgi, sise- ja välisnurk, nurgapoolitaja ja selle omadus (põhikoolis omadusest ei räägita), sise- ja ümberringjoon ning nende konstrueerimine, mediaani mõiste ja selle omadus, kesklõik ja selle omadus. Täisnurkne kolmnurk – meetrilised seosed, teravnurga trigonomeetrilised funktsioonid, sise- ja ümberringjoone raadius. Kolmnurga lahendamine siinus- ja koosinusteoreemi järgi, kolmnurga pindala valemid. Hulknurk, selle liigid (kumer, mittekumer, korrapärane, mittekorrapärane). Kumera hulknurga sisenurkade summa. Hulknurkade sarnasus ning sarnaste hulknurkade ümbermõõtude suhe ja pindalade suhe. Hulknurga sise- ja ümberringjoon, kõõl- ja puutujahulknurk. Rööpkülik, selle eriliigid (ruut, ristkülik, romb) ja omadused (ka sisenurga poolitaja).	Planimeetria teemat pole gümnaasiumis enne põhjalikult korratud, juurde on õpitud üksnes kolmnurga lahendamine siinus- ja koosinusteoreemiga, võimalus kasutada vektorarvutust ning lisatud pindala valemeid. Korrates (enamasti uuesti õppides) põhikoolis õpitut, tuleb nüüd rohkem tähelepanu pöörata teadmiste omavahelisele sidumisele, üksikult üldisele minekule, teksti hoolikale lugemisele ja loetu põhjal jooniste tegemisele. Tuleb arvestada, et õpetada saab ainult isikliku eeskujuga, seega korrektsed joonised, andmete märkimine, vajalikud selgitused lahenduskäigus, vastuse vormistamine. Kujundite omaduste uurimiseks võib kasutada IKT vahendeid, samuti kontrollimiseks ning mõnel juhul aja kokkuhoiu mõttes ka arvutuste tegemiseks. Õpetaja või õpilase lahenduskäigu kirjapanekut tahvlil ei asenda miski. Õpilases tuleb arendada vaatlusoskust ja seoste leidmise oskust, samuti tuleb näidata, et silmaga nähtav ei pruugi olla õige. Ei tohi unustada, et kõige rohkem teame kolmnurgast, järelikult tuleb kolmnurki

<table>
<tr><td></td><td></td><td>Trapets, selle liigid (võrdhaarne, täisnurkne). Trapetsi kesklõik, selle omadus.

Ringjoone kesknurk ja piirdenurk. Thalese teoreem.

Ringjoone lõikaja ja puutuja, nende omadused.</td><td>märgata teistes kujundites, eriti otsida täisnurkseid kolmnurki. Neid oskusi on vaja ruumigeomeetriat õppides.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Näiteülesanded

A: Kolmnurga kahe külje pikkused on 7 cm ja 8 cm. Nurk nende vahel on $120°$. Arvutage kolmnurga ümbermõõt ja pindala. Arvutage selle kolmnurga vähim nurk, pikim kõrgus ja ümberringjoone pikkus. Leidke võimalikult palju üksikuid elemente kolmnurgas.

B: 1. Võrdhaarse kolmnurga alusnurk on $20°$. Leidke nurk ühe haara ja teisele haarale tõmmatud kõrguse vahel.
2. Rööpküliku $ABCD$ teravnurga poolitaja jaotab vastaskülje AD lõikudeks $AE = 15$ ja $ED = 7$. Leidke rööpküliku ümbermõõt.

C: 1. Võrdhaarse trapetsi siseringjoone raadius on 4 cm. Puutepunkt jaotab haara lõikudeks, mille vahe on 6 cm. Leidke trapetsi kesklõik ja pindala.
2. Punkt K asub kolmnurga ABO küljel AB. Teada on, et $BK = 12$, $AK = 4$, $\angle BOK = \angle BAO$, $\cos\angle B = \frac{\sqrt{6}}{3}$. Leidke kolmnurga OBK pindala.
3. Leidke trapetsi ümberringjoone raadius, kui selle trapetsi kesklõik on 14, haar on $4\sqrt{2}$ ja üks alus on ringjoone diameeter.</td></tr>
<tr><td>9) selgitab kolmnurkade kongruentsuse ja sarnasuse tunnuseid;
10) selgitab sarnaste hulknurkade omadusi ning kujundite</td><td>Hulknurkade sarnasus. Sarnaste hulknurkade ümbermõõtude suhe ja pindalade suhe.</td><td>Õpilane saab aru ja selgitab kolmnurkade joonestamise võimalusi, kongruentsuse tunnuseid ning sarnasuse tunnuseid (KKK, KNK, NKN ja ülesannete kaudu tublimatele ka KKN).</td><td>Põhikoolis õpitud teema, kuid seda on vaja korrata. Tähtis on tulemuse visualiseerimine (tahvlil või IKT vahenditega). Stereomeetria kursuses baseerub põhjaga paralleelne lõige nendel teadmistel.</td></tr>
</table>

ümbermõõdu ja pindala arvutamist;		Sarnaste hulknurkade (ka kolmnurkade ja nelinurkade) omadused. Sarnaste hulknurkade ümbermõõtude ja kõigi joonelementide suhe. Sarnaste hulknurkade pindalade suhe.	
11) lahendab planimeetria arvutusülesandeid ning lihtsamaid tõestusülesandeid; 12) kasutab geomeetrilisi kujundeid kui mudeleid ümbritseva ruumi objekte uurides.	Rakenduslikud geomeetriaülesanded.	Üks tõestusülesande võimalusi võib olla üldkujus ülesande lahendamise (esimene etapp või kogu ülesanne).	Eluline ülesanne võib olla oma korteri (maja) sanitaarremondi kalkulatsiooni koostamine (projekt rühma- või paaristööna). Õpilased peaksid käima kaupluses hindu ja materjale vaatamas, arvestama reserve, tegema korteri plaani jne. Lisandub protsentarvus, vormistamine.

Näiteülesanded

B: Antud on täisnurkne kolmnurk PRS, mille kaatet *PR* ja hüpotenuus *PS* on vastavalt 18 cm ja 30 cm. Kaatetil *RS* on valitud punkt *T,* nii et kaugused punktist *R* ja hüpotenuusist *PS* on võrdsed.

1. Tehke joonis ja arvutage lõigu TR pikkus.
2. Arvutage kolmnurga PRS ümberringjoone pikkus ja siseringjoone pindala.

C: Täisnurkse trapetsi kujulise maatüki alused on p ja r ($p < r$) ning lühem haar q.

1. Maatüki diagonaalide lõikepunkti istutatakse ploomipuu. Avaldage ploomipuu kaugus lühemast alusest.
2. Arvutage see kaugus, kui p = 3 m, r = 70 dm ja q = 5 m.

Lõiming

Lõiming keele ja kirjandusega (tekstist arusaamise ja eneseväljendusoskuse arendamine), sotsiaalainetega (hüpoteesi püstitamine ja tõestamine), kunstiõpetusega (geomeetrilised kujundid), füüsikaga (hilisemates õpikutes integraali kasutamine) ja reaalse eluga (ehitus, remont jne).

Läbivatest teemadest lõiming elukestva õppe ja karjääri planeerimisega (abstraktse ja loogilise mõtlemise areng), kodanikualgatuse ja ettevõtlikkusega (rühmatöö kasutamine), tehnoloogia ja innovatsiooniga (IKT vahendite kasutamine näitlikustamiseks), väärtuste ja kõlblusega (õpilane arendab endas püsivust, täpsust, korrektsust jne).

12. kursus

Sirge ja tasand ruumis

Eemärgid:

1) saavutada allkirjeldatud õpitulemused nii, et õpilane omandab tüüpülesandeid ning kergemaid mitterutiinseid ülesandeid lahendades õppekavas kirjeldatud oskused;
2) arendada õpitegevuse kaudu üld- ja ainepädevusi nii, et õpilane suudaks lahendada keerukamaid ülesandeid, mis võimaldaksid õppekavas kirjeldatud teadmisi ja oskusi rakendada väga heal tasemel.

Üld- ja ainepädevused:

1) suutlikkus kasutada vastavale alateemale omast keelt, sümboleid ning meetodeid. Selleks nõuda kirjalikus ja suulises eneseväljenduses distsiplineeritult mõistete ning keelesümboolika rakendamist;
2) suutlikkus arutleda loovalt ja loogiliselt ning leida ülesande lahendamiseks sobivad strateegiad. Selleks käsitleda ülesannete lahendamise üldisi strateegiaid;
3) suutlikkus põhjendada ja tõestada oma mõttekäike;
4) suutlikkus analüüsida ja esitada alternatiive ning oskus teha valikuid. Selleks käsitleda üht ülesannet eri vaatenurkadest ja soodustada erinevate lahendusteede otsimist;
5) suutlikkus reflekteerida oma tegevust ning kriitiliselt hinnata tegevuse resultaati. Selleks peaks õpilane esitama iseendale küsimusi: mida ma teen; miks ma nii teen; milleni ma olen jõudnud ning kas tulemus on õige ja kontrollitav.

Eelduskursused: matemaatika lai
I kursus (avaldiste lihtsustamine);
II kursus (võrrandite ja võrrandisüsteemide lahendamine);

III kursus (täisnurkse kolmnurga lahendamine);
IV kursus (kolmnurga lahendamine);
V kursus (vektor ja sirge tasandil);
XI kursus (planimeetria).

Ülesannete raskusaste:
A – tüüpilisi algoritme rakendav arvutus- või teisendusülesanne;
B – ühe- või kaheetapilise suhteliselt tuntud mudeli koostamise ja rakendamise ülesanne;
C – mitmeetapilise mudeli loomise ja rakendamise ülesanne.

Õpitulemused	Õppesisu	Oskuste ja teadmiste täpsustused	Soovitused
Õpilane: 1) kirjeldab sirge ja tasandi vastastikuseid asendeid; 2) määrab kahe sirge, sirge ja tasandi, kahe tasandi vastastikuse asendi ning arvutab nurga nende vahel stereomeetria ülesannetes;	Ruumigeomeetria asendilaused: nurk kahe sirge, sirge ja tasandi ning kahe tasandi vahel, sirgete ja tasandite ristseis ning paralleelsus, kolme ristsirge teoreem, hulknurga projektsiooni pindala.	Õpilane: 1) kirjeldab kahe sirge vastastikuseid asendeid ruumis (paralleelsed, ühtivad, lõikuvad ja kiivsirged) ning leiab sirgete vahelise nurga; 2) kirjeldab sirge ja tasandi vahelisi asendeid (sirge asub tasandil, sirge on tasandiga paralleelne, sirge lõikab tasandit) ning leiab sirge ja tasandi vahelise nurga (teades kolme ristsirge teoreemi); 3) kirjeldab kahe tasandi vastastikuseid asendeid ruumis (ühtivad, paralleelsed, lõikuvad) ja leiab lõikumise korral nende vahelise nurga;	Soovitusi andes lähtume käibivast õpikust. Lisamaterjalidena sobivad kõik gümnaasiumile mõeldud ülesannete kogud ning kontrolltööde kogumik 12. klassile. Kursuse alguses on vaja otsustada, kas õpetada teemat koos sirgete ja tasandite võrranditega või ilma nendeta. Kui sirgete ja tasandite võrrandid ruumis kõrvale jätta, siis on ülejäänud teema õpetamiseks rohkem aega. Sirgete ja tasandite vastastikuste asendite uurimisel tuleb mõelda saadud teadmiste rakendamisele – stereomeetria ülesannetes servad, diagonaalid, apoteemid, kõrgused ja kõikvõimalikud tahud.
Näiteülesanded			

<table>
<tr><td colspan="4">A: Kahetahulise nurga ühel tahul on võetud punkt, mis asub 7 cm kaugusel nurga servast. Leidke selle punkti kaugus teisest tahust, kui kahetahulise nurga suurus on 30°.

B: Risttahuka diagonaal, mille pikkus on d, moodustab tahkudega nurgad 30^0, 45^0 ja 60^0. Kui suured nurgad moodustab see diagonaal ühest tipust lähtuvate servadega? (L. Lepmann, T. Lepmann, K. Velsker)

C: Nürinurkse kolmnurga lühim külg asub tasandil ja kolmnurk moodustab selle tasandiga 30^0 nurga. Kolmnurga tipu kaugus tasandist on 12 cm ja lühima külje pikkus on 8 cm. Arvutage kolmnurga pindala.</td></tr>
<tr><td>3) kirjeldab punkti asukohta ruumis koordinaatidega;</td><td>Ristkoordinaadid ruumis. Punkti koordinaadid ruumis, punkti kohavektor.</td><td>4) saab aru ristkoordinaatide tähendusest nii tasandil kui ka ruumis ning kirjeldab punkti asukohta mõlemas;
5) saab aru kohavektori tähendusest, oskab leida kohavektori koordinaate ja rakendab oskusi ülesannetes;</td><td>Kõigepealt on vaja meelde tuletada ristkoordinaadid tasandil, samuti kõik lõigu pikkuse ja vektoriga seonduv. Näitlikustamiseks kasutatakse GeoGebra nii 2D kui ka 3D versiooni.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Näiteülesanded

A: Antud on kolm punkti P, R ja S oma tippudega P(–1; 5; 4), R(2; 0; 2) ja S(–1; 1; 5). Leidke punktide P, R ja S kohavektori koordinaadid.

B: Punkti P(–1; 5; 4) rakendatakse vektor $\overrightarrow{PG}$, mis on võrdne eelmise ülesande vektoriga $\overrightarrow{RS}$. Leidke vektori $\overrightarrow{PG}$ lõpppunkti G koordinaadid.</td></tr>
<tr><td>4) selgitab ruumivektori mõistet, lineaartehteid vektoritega, vektorite kollineaarsuse ja komplanaarsuse tunnuseid ning</td><td>Vektori koordinaadid ruumis, vektori pikkus. Lineaartehted vektoritega. Vektorite kollineaarsus ja komplanaarsus, vektori avaldamine kolme mis tahes mittekomplanaarse vektori</td><td>6) saab aru ruumivektori mõistest ja märkab, et kaldprojektsioonis tehtud joonised teda ülesannete lahendamisel enam alati ei aita;</td><td>Õpiku ülesanded pole selle teema puhul A- ja B-tasemega määratud. Õpetaja peaks enne ülesanded selekteerima (klassis koos, iseseisvaks lahendamiseks, tõestusülesanded tublimatele jne).</td></tr>
</table>

vektorite skalaarkorrutist; 5) arvutab kahe punkti vahelise kauguse, vektori pikkuse ning kahe vektori vahelise nurga;	kaudu. Kahe vektori skalaarkorrutis. Kahe vektori vaheline nurk.	7) saab aru vektori koordinaatide tähendusest ja oskab neid leida; 8) lahendab lineaartehteid vektoritega; 9) saab aru vektorite kollineaarsuse mõistest, kontrollib kahe vektori kollineaarsust ja leiab vajaduse korral vektori puuduva koordinaadi, lähtudes kollineaarsuse tingimusest; 10) saab aru vektorite komplanaarsuse mõistest ja oskab seda kontrollida; 11) mõistab, et iga vektorit ruumis saab avaldada kolme mittekomplanaarse vektori kaudu; 12) oskab leida vektori pikkust ning kasutab teadmist kahe punkti vahelise kauguse arvutamiseks ruumis; 13) tunneb vektorite skalaarkorrutise tähendust ning rakendab seda vektorite vahelise nurga leidmiseks ruumis;	Kolme ruumivektori komplanaarsuse kontrollimise kõrval peaks õpilastele näitama, et iga ruumivektorit saab avaldada kolme mittekomplanaarse vektori kaudu.
Näiteülesanded			

<table>
<tr><td colspan="4">

A: Antud on vektorid $\vec{a}=(2;\ -4;\ 5)$ ja $\vec{b}=(-3;\ 0;\ 1)$. Leidke vektorite $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$ ja $2\vec{a}+3\vec{b}$ koordinaadid. Arvutage vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ vaheline nurk.

B: 1. Millised vektorid on kollineaarsed? Tooge näide. Milliste a ja b väärtuste korral on vektorid $\vec{p}=(-2;\,4;\,b)$ ja $\vec{r}=(a;\,-12;\,15)$ kollineaarsed?

2. Milliseid vektoreid nimetatakse komplanaarseteks? Näidake, et vektorid $\vec{u}=(1;\,-2;\,2)$, $\vec{v}=(3;\,3;\,-3)$ ja $\vec{t}=(2;\,-1;\,1)$ on komplanaarsed.

C: Antud on punktid $A(1;\,3;\,0)$, $B(1;\,0;\,4)$ ja $C(-2;\,1;\,6)$. Leidke kolmnurga ABC pindala, ümbermõõt ja lühim kõrgus.

</td></tr>
<tr>
<td></td>
<td>Sirge võrrandid ruumis, tasandi võrrand. Võrranditega antud sirgete ja tasandite vastastikuse asendi uurimine, sirge ja tasandi lõikepunkt, võrranditega antud sirgete vahelise nurga leidmine.</td>
<td>14) mõistab, et sirge võrrandit saab kirjutada kahel viisil, ning oskab teadmist rakendada;
15) oskab määrata sirgete vahelist vastastikust asendit ning leiab sirgete vahelise nurga ja lõikepunkti;
16) saab aru tasandi võrrandi koostamise võimaluste paljususest ning oskab tasandi võrrandit koostada;
17) määrab võrranditega antud tasandite vastastikuse asendi ning leiab tasandite vahelise nurga;
18) määrab võrranditega antud sirge ja tasandi vastastikuse asendi ning leiab nendevahelise nurga ja lõikepunkti;</td>
<td>Kui otsustate õpetada sirgeid ja tasandeid ruumis ka võrrandite järgi, siis peaks meelde tuletama sirgete võrrandite koostamise tasandil (V kursus) ja näitama, et ruumis on sirgete võrrandite kirjutamine piiratud kahe võttega (punkt ja sihivektor, 2 punkti).

Tasandi võrrandi kirjutamiseks on samuti kaks moodust: kahe vektori ristseis ja kolme vektori komplanaarsus. Väga oluline on, et õpilased saaksid aru sirge sihivektori ja tasandi normaalvektori erinevusest ning oskaksid neid ülesandeid lahendades õigesti kasutada. Kõik ülesanded nõuavad suurt tähelepanu ja täpsust, sest arvutamist on palju.

Mõningad teema osad võib omandada rühma- või paaritööna.</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4">

Näiteülesanded

B: 1. Määrake tasandite α ja β vastastikune asend. Lõikumise korral leidke tasandite vaheline nurk. Tasandid on määratud järgmiselt:

α: punktid $K(3; –2; 1)$, $L(–1; 3; 1)$ ja $M(2; –3; 2)$;

β läbib punkti $B(1; –1; 4)$ ja on risti sirgega $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-1}{3}$.

2. Antud on sirge $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+5}{-2}$ ja tasand $3x+4y-2z+1=0$. Leidke sirge sihivektori ja tasandi normaalvektori vaheline nurk.

3. Määrake sirgete *s* ja *t* vastastikune asend ning lõikumise korral leidke lõikepunkti koordinaadid, kui sirged on määratud järgmiselt:

s: punkt $A(2; –1; 3)$ ja sihivektor $\vec{s}=(6;\ 4;\ 2)$;

t: punktid $B(5; 1; 4)$ ja $C(7; 7; 8)$.

</td></tr>
<tr><td>7) kasutab vektoreid geomeetrilise ja füüsikalise sisuga ülesandeid lahendades.</td><td>Rakendusülesanded.</td><td>19) peab oskama lugeda ülesande teksti, loetust aru saama ja selle põhjal jooniseid tegema (vt allpool B-taseme näidet).</td><td>Seda teemat rakendatakse suurel määral matemaatika laias 13. kursuses ruumiliste kehade juures. Siin tuleb õpetada õpilasi teksti lugema ja loetut ette kujutama.</td></tr>
<tr><td colspan="4">

Näiteülesanded

A: Kolmnurga tipud on $K(–2; 1, –3)$, $L(–5; 5; –3)$ ja $M(–3; –1; –1)$. Leidke tipu *K* juures olev sisenurk ja küljega *LM* paralleelse kesklõigu pikkus.

B: 1. Püramiidi *KLMN* tipp asub punktis *N*. Tahule *LMN* on tõmmatud kõrgus *NP*. Külgserv *KN* moodustab põhjaga nurga β. Püramiidi kõrgus toetub punkti *O*. Tahk *LMN* moodustab põhjaga nurga α .Tahkude *KLN* ja *KMN* vaheline nurk on δ. Tahu *LMN* apoteem moodustab servaga *NL* nurga χ. Tehke püramiidi joonis ning kandke sellele antud tähed ja nurgad.

2. Koonuse tipp asub punktis $T\left(0;3;\sqrt{7}\right)$. Punkt $R\left(6;\ 9;\ 3\sqrt{7}\right)$ asub koonuse põhja ringjoonel. Põhja raadius on 6. Leidke koonuse ruumala.

</td></tr>
</table>

C: 1. Kuubi $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kolme tipu koordinaadid on $B(a; 0; 0)$, $C(a; a; 0)$ ja $D(0; a; 0)$. Kuupi lõikab tasand, mis läbib diagonaali AC ning servade A_1D_1 ja C_1D_1 keskpunkte.
1) Leidke nurgad lõiketasandi ja kuubi põhja vahel.
2) Leidke tipu D kaugus lõiketasandist. (RE 1988)

2. Kolmnurga KLM tipud on $K(2; –1; 6)$, $L(5; 3; –1)$ ja $M(2; 1; 4)$. Leidke kolmnurga raskuskeskme koordinaadid. Kuidas on võimalik raskuskeskme koordinaate leida kolmnurga tippude koordinaatide kaudu? Tõestage püstitatud hüpotees.

Lõiming

Lõiming keele ja kirjandusega (tekstist arusaamise ja eneseväljendusoskuse arendamine), sotsiaalainetega (hüpoteesi püstitamine ja tõestamine), füüsikaga (punkt ja vektor ruumis).

Läbivatest teemadest lõiming elukestva õppe ja karjääri planeerimisega (abstraktse ja loogilise mõtlemise areng), kodanikualgatuse ja ettevõtlikkusega (rühmatöö kasutamine), tehnoloogia ja innovatsiooniga (IKT vahendite kasutamine näitlikustamiseks), väärtuste ja kõlblusega (õpilane arendab endas püsivust, täpsust, korrektsust jne).

13. kursus

Stereomeetria

Eesmärgid:

1) saavutada allkirjeldatud õpitulemused nii, et õpilane omandab tüüpülesandeid ning kergemaid mitterutiinseid ülesandeid lahendades õppekavas kirjeldatud oskused;
2) arendada õpitegevuse kaudu üld- ja ainepädevusi nii, et õpilane suudaks lahendada keerukamaid ülesandeid, mis võimaldaksid õppekavas kirjeldatud teadmisi ja oskusi rakendada väga heal tasemel.

Üld- ja ainepädevused:

1) suutlikkus kasutada alateemale omast keelt, sümboleid ning meetodeid. Selleks nõuda kirjalikus ja suulises eneseväljenduses distsiplineeritult mõistete ning keelesümboolika rakendamist;

2) suutlikkus arutleda loovalt ja loogiliselt ning leida ülesande lahendamiseks sobivad strateegiad. Selleks käsitleda ülesannete lahendamise üldisi strateegiaid;
3) suutlikkus põhjendada ja tõestada oma mõttekäike, kusjuures tõestada mitte niivõrd väite tõesuse näitamiseks, kuivõrd aitamaks luua üksikteadmistes süsteemi;
4) suutlikkus analüüsida ja esitada alternatiive ning oskus teha valikuid. Selleks käsitleda üht ülesannet eri vaatenurkadest ja soodustada erinevate lahendusteede otsimist;
5) suutlikkus reflekteerida oma tegevust ning kriitiliselt hinnata tegevuse resultaati. Selleks peaks õpilane esitama iseendale küsimusi: mida ma teen; miks ma nii teen; milleni ma olen jõudnud ning kas tulemus on õige ja kontrollitav.

Eelduskursused: matemaatika lai
II kursus (võrrandid);
III kursus (trigonomeetria);
XI kursus (planimeetria).

Ülesannete raskusaste:
A – tüüpilisi algoritme rakendav arvutus- või teisendusülesanne;
B – ühe- või kaheetapilise suhteliselt tuntud mudeli koostamise ja rakendamise ülesanne;
C – mitmeetapilise mudeli loomise ja rakendamise ülesanne.

Õpitulemused	Õppesisu	Oskuste ja teadmiste täpsustused	Soovitused
Õpilane: 1) teab hulktahukate liike ning nende pindalade ja ruumala arvutamise valemeid;	Prisma ja püramiid, nende pindala ja ruumala. Korrapärased hulktahukad.	Õpilane: 1) oskab liigitada hulktahukaid erineval alusel, nt korrapärasuse ja mittekorrapärasuse põhjal, põhja kuju ja tippude arvu järgi; 2) kirjeldab, kuidas pöördkehad tekivad ja millest need koosnevad.	Soovitusi andes lähtume käibivast Koolibri õpikust. Üldjuhul on õpiku A-osa ülesanded A- ja B-taseme ülesanded, õpiku B-osa ülesanded on B- ja C-taseme ülesanded. Lisaks soovitame tugevamatele õpilastele TÜ Teaduskooli õppematerjali „Hulktahukad. Pöördkehad“ (koostanud Leida Tuulmets ja Kaarel Koitmets) aadressil

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>http://www.teaduskool.ut.ee/et/oppeto o/matemaatika-oppematerjalid.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Näiteülesanded

A: Lillevaas on korrapärase kuusnurkse prisma kujuga. Mitu liitrit vett mahub vaasi, kui põhiserv on 10 cm ja vaasi kõrgus on 60 cm?

B: Püramiidi põhjaks on kolmnurk, mille küljed on 9 cm, 21 cm ja 24 cm. Kõik püramiidi külgservad on 74 cm. Arvuta püramiidi kõrgus ja püramiidi ruumala. (Kalju Kallaste)</td></tr>
<tr><td>2) teab pöördkehade liike ning nende pindalade ja ruumala arvutamise valemeid;</td><td>Pöördkehad. Silinder, koonus ja kera, nende pindala ja ruumala. Kera segment, kiht, vöö ja sektor.</td><td>Valemeid käsitledes näidatakse kindlasti pindalade kujunemist nn tükkide kaupa ning nõutakse mõistete kasutamist pindala koostist selgitades.

Stereomeetria ülesandeid lahendades peab õpilane kasutama õppekavas õpitud trigonomeetria ja planimeetria teadmisi, leidma ühe elemendi või kaks elementi enne küsitud suuruse leidmist.

Õpilane peab eristama alaülesanded ning looma (mudeli) strateegia, et saavutada eesmärk.</td><td>Pööratakse tähelepanu jooniste tegemisele joonestusvahenditega.

Tarkvaralahendusi kasutatakse kehade pinnalaotuste ja lõigete tutvustamiseks.

Tarkvaralahendustega 3D jooniste loomine jäetakse valikainetes õpetatavatele valdkondadele.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Näiteülesanded

A: Võrdhaarne trapets pöörleb ümber lühema aluse. Kirjeldage, mis pöördkeha tekib. Kuidas leida tekkiva pöördkeha ruumala? Mis kujund tekib, kui see trapets pöörleb ümber pikema aluse?</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="4">B: Kera on ühel ja samal pool keskpunkti lõigatud kahe paralleelse tasandiga, mis asetsevad keskpunktist 16 cm ja 25 cm kaugusel. Kera raadius on 65 cm. Leidke kihi kõrgus. (Kalju Kallaste)</td></tr>
<tr><td>3) arvutab kehade pindala ja ruumala ning nende kehade ja tasandi lõike pindala;</td><td>Silindri, koonuse või kera ruumala valemi tuletamine.</td><td>Õpilane peab suutma lahendada ülesandeid üldkujul, kasutades vajalike suuruste avaldamist.

Püramiidi korral peab lahendama ülesandeid, kus tipu projektsioon on põhiserval või sise-, ümberringjoone keskpunktis.</td><td>Alaülesannete ning strateegia loomisel esitletakse õpilastele või lastakse neil endal tutvustada erinevaid eesmärgini jõudmise teid või arutluskäike.

Tutvustatakse kaldprismat.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Näiteülesanded

A: Silindri telg on 15 cm ja telglõike diagonaal 17 cm. Arvutage silindri pindala. (Kalju Kallaste)

B: Võrdkülgse telglõikega koonuse kõrgus on 12 cm. Arvutage koonuse ruumala ja külgpindala.

C: Silinder on lõigatud teljega paralleelse tasandiga, mis eraldab põhja ringjoonest 60° kaare. Leidke lõike pindala, kui lõike diagonaal on 15 cm ja silindri põhja raadius on 9 cm. (Kalju Kallaste)</td></tr>
<tr><td>4) kasutab hulktahukaid ja pöördkehi kui mudeleid ümbritseva ruumi objekte uurides.</td><td>Ülesanded hulktahukate ja pöördkehade kohta. Hulktahukate ja pöördkehade lõiked tasandiga. Rakendusülesanded.</td><td>Tahkkehade lihtsamad lõiked on tahuga, kõrgusega ja põhjaga paralleelne lõige, diagonaallõige.

Pöördkehade lihtsamad lõiked on silindri ja koonuse telglõige ning põhjaga paralleelne lõige, koonuse erinevad tippu läbivad lõiked, silindri teljega paralleelne lõige.

Kera puhul on keskpunkti läbiv lõige ja sellega paralleelne lõige.</td><td>Üldkujul lahendatavate ülesannete lahendamise õppimise lihtsustamiseks võib õpilase toetamiseks anda sama sisu ja tekstiga ülesande nii arvandmetega kui ka üldkujul.</td></tr>
</table>

		Rakendusülesanne ei saa sisaldada elemente, mis ületavad eespool kirjeldatud teadmisi ja oskusi.	

Näiteülesanded

A: Kolm kera läbimõõtudega 3 cm, 4 cm ja 5 cm sulatati üheks keraks. Arvutage saadud kera raadius.

B: Püramiidi põhjaks on ristkülik diagonaaliga d ja diagonaalide vahelise nurgaga α. Kõik külgservad moodustavad põhjaga nurga φ. Leidke püramiidi ruumala.

C: Varikatuse ristlõige on saadud võrdkülgsest kolmnurgast selle ühe nurga ümardamisel ringjoone kaarega, mille raadius on r. Sealjuures on kolmnurga kaks külge ringjoone puutujad. Varikatuse laius ja pikkus on vastavalt $4\sqrt{3}r$ ja b. Leidke varikatuse pindala S, katusealuse ruumala V ja kõrgus h. (innove.ee)

Lõiming

Ainesisene lõiming eelduskursustega.

Lõiming teiste ainetega

Ajalugu. Püramiidid
Elukestev õpe ja karjäär. Abstraktse ja loogilise mõtlemise areng.
Kultuuriline identiteet. Matemaatika ajalugu, Vana-Kreeka, Thales.
Kodanikualgatus ja ettevõtlikkus. Õuesõppetunnid, rühma- ja paaristöö, koostööoskuste arendamine.
Väärtus ja kõlblus. Süstemaatilisuse, püsivuse, täpsuse, korrektsuse ja kohusetunde arendamine.

14. kursus

Matemaatika rakendused, reaalsete protsesside uurimine

Eesmärgid:

1) saavutada allkirjeldatud õpitulemused nii, et õpilane omandab tüüpülesandeid ning kergemaid mitterutiinseid ülesandeid lahendades õppekavas kirjeldatud oskused ja seob need tervikuks;
2) arendada õpitegevuse kaudu üld- ja ainepädevusi nii, et õpilane suudaks luua ülesannete lahendamiseks mudeleid, mis võimaldavad õppekavas kirjeldatud teadmisi ja oskusi rakendada väga heal tasemel.

Üld- ja ainepädevused:

1) suutlikkus kasutada elulisele ülesandele vastava matemaatilise mudeli keelt, sümboleid ning meetodeid. Selleks nõuda eneseväljenduses distsiplineeritult mõistete ja keelesümboolika rakendamist ning oma lahenduskäikude põhjendamist;
2) suutlikkus arutleda loovalt ja loogiliselt ning leida mudeli lahendamiseks sobivad strateegiad. Selleks käsitleda ülesannete lahendamise üldisi strateegiaid;
3) suutlikkus reflekteerida oma tegevust ning kriitiliselt hinnata tegevuse resultaati. Selleks saab kasutada õpilaste tehtud vigu, nende vigade analüüsimist ja vea tekkimise põhjuste leidmist;
4) süstemaatilisuse, püsivuse, täpsuse, korrektsuse ja kohusetunde arendamine kujundab väärtus- ja kõlbluspädevust;
5) ülesannete lahendamine erinevatel meetoditel, valiku tegemine ning otsustamine kujundavad enesemääratluspädevust ja õpipädevust;
6) rühma- ja paaristöö ning koostööoskuste arendamine kujundavad kodanikualgatust ja ettevõtlikkust.

Eelduskursused: kõik eelnevad matemaatika laiad kursused (kokku 13).

Ülesannete raskusaste:

A – tüüpilisi algoritme rakendav arvutus- või teisendusülesanne;
B – ühe- või kaheetapilise suhteliselt tuntud mudeli koostamise ja rakendamise ülesanne;
C – mitmeetapilise mudeli loomise ja rakendamise ülesanne.

Õpitulemused	**Õppesisu**	**Oskuste ja teadmiste täpsustused**	**Soovitused**
Õpilane: 1) selgitab matemaatilise modelleerimise ning	Matemaatilise mudeli tähendus, nähtuse modelleerimise etapid, mudeli	Matemaatiline mudel on objekti või nähtuse lihtsustatud esitlus, mis kasutab matemaatika	Kirjastuse Koolibri 12. klassi õpikus on hästi esitatud matemaatilise mudeli mõiste koos näidete ja selgitustega. Näited peab klassis läbi arutama ja seejärel õpikus esitatud ülesanded lahendama. Mudeli mõistet peaks hakkama

selle protseduuride üldist olemust; 2) tunneb lihtsamate mudelite koostamiseks vajalikke meetodeid ja funktsioone;	headuse ja rakendatavuse hindamine.	keelt. Mudeli koostamist nimetatakse matemaatiliseks modelleerimiseks. Modelleerimise etapid: 1) elulisest ülesandest arusaamine ja küsimuse sõnastamine; 2) matematiseerimine – mudeli valimine; 3) mudeli koostamine; 4) mudeli – matemaatikaülesande – lahendamine; 5) matemaatikaülesande lahendite kontrollimine; 6) saadud lahendite selekteerimine, lähtudes elulisest ülesandest; 7) lahendite kontroll esialgse elulise ülesande järgi; 8) vastuse sõnastamine esialgsele ülesandele. Mudeli headuse ja rakendatavuse hindamiseks tuleb klassis arutada ühiselt läbi õpikus	kasutama juba gümnaasiumiastme algusest alates. Sel juhul võib seda kursust võtta kui mudeli mõiste rakendamise kokkuvõtet. Ei tohi unustada ka vana – György Pólya pakutud ülesande lahendamise etappe. Kui õpetajal on kasutada ka kordav (eksamiks ettevalmistav) kursus, siis tasub mõelda selle kursuse ja kordamise ühitamisele. Lisaks on https://moodle.hitsa.ee/course/view.php?id=11904koostatud veebimaterjal 35 auditoorse tunni läbimiseks, neist 18 tundi arvutiklassis. Kursuse autorid Ants Aasma, Ako Sauga ja Riina Timmermann (GAG) tutvustavad matemaatika rakendusi erinevates valdkondades (bioloogia, füüsika, geograafia, keskkond, majandus, muusika, sport, tehnoloogia, tervishoid) ning jagavad oskusi lihtsamate reaalseid nähtusi kirjeldavate matemaatiliste mudelite loomiseks, nende analüüsimiseks ja tõlgendamiseks. Kursusel on olemas õpik, töölehed, lahendusi ja metoodilisi soovitusi sisaldav õpetajaraamat, interaktiivsed demod, testid, ekraanivideod ja muud elektroonsed lisamaterjalid. Õpetaja saab oma tööd mitmekesistada.

		toodud näited ning püüda lisaks leida materjale internetist.	
3) lahendab tekstülesandeid võrrandite või võrrandisüsteemidega;	Tekstülesannete (sh protsentülesannete) lahendamine võrrandite kui ülesannete matemaatiliste mudelite koostamise ja lahendamise järgi.	Elulisi ülesandeid lahendades peab jälgima jõukohasust ja probleemist arusaadavust. Õpikuülesanded ei pruugi alati õpilastele mõistetavad olla (teema ei kõneta vahel õpilasi). Lahendada võiks kinnisvara rendi ja müügi, ostukorvi, kokanduse, tervisliku toitumise, astronoomia, arvuteooria, liikumise, töötegemise, panganduse, planeerimise, metsanduse jne üleandeid.	Et hakata lahendama tekstülesandeid, koostades võrrandeid ja võrrandisüsteeme, tuleb alustada vajalike oskuste kordamisest: arvutamine reaalarvudega, osa ja terviku leidmine, võrdeline ja pöördvõrdeline jaotamine, protsent, avaldiste lihtsustamine, võrrandite (lineaar-, ruut-, kõrgema astme, murdvõrrandite) lahendamine, võrratuste ja võrrandisüsteemide lahendamine. Paralleelselt võiks hakata lahendama kolmandast kooliastmest tuttavaid tekstülesandeid. Võrrandite ja lihtsamate võrratuste puhul peaks püüdma lahendada parameetri (kordaja) leidmise ülesandeid. Kuna põhikoolis enam murdvõrrandi koostamisele taanduvaid tekstülesandeid ei lahendata, siis peab õpetaja otsustama, kas tegelda teemaga põhjalikult 2. kursusel või alles siin.

Näiteülesanded

A: Ehitusmaterjali hind koos veokuludega on 445,20 eurot, kusjuures veokulud moodustavad 6% materjali hinnast. Kui palju maksab ehitusmaterjal? (TTÜ eksam)

B: 1. Lahendage võrrandisüsteem $\begin{cases} 2^x + 2y = -1, \\ 3{,}5 \cdot 2^{x+1} - 20y = 146. \end{cases}$

<table>
<tr><td colspan="4">2. Tartust Tallinna on ligikaudu 180 km. Ühel ajal startisid Tartust Tallinnasse sõiduauto ja buss. Sõiduauto keskmine kiirus oli 5 km/h suurem kui bussil; sõiduauto jõudis Tartust Tallinnasse 9 minutit varem kui buss. Kui suure keskmise kiirusega liikusid mõlemad sõidukid? (Katsetöö 2013)
3. Vt RE 2015 laia I osa 5. ülesanne, RE 2015 laia II osa 4. ülesanne, RE 2014 laia II osa 3. ülesanne.

C: Metsatööliste brigaad pidi teatud ajaga varuma 264 m^3 küttepuid. Esimesel kolmel päeval tegid nad iga päev täpselt nii palju tööd, nagu norm ette nägi. Igal järgmisel päeval ületasid nad normi aga 7 m^3 võrra. Seetõttu oli juba üks päev enne tähtaega üles töötatud 289 m^3 küttepuid. Milline oli selle brigaadi planeeritud päevanorm?</td></tr>
<tr>
<td>4) märkab reaalse maailma valdkondade mõningaid seaduspärasusi ja seoseid;
5) koostab kergesti modelleeritavate reaalsuse nähtuste matemaatilisi mudeleid ning kasutab neid tegelikkuse uurimiseks;
6) kasutab mõningaid loodus- ja majandusteaduse olulisemaid mudeleid ning meetodeid;</td>
<td>Lineaar-, ruut- ja eksponentfunktsioone rakendavad mudelid loodus- ning majandusteaduses, tehnoloogias ja mujal (nt füüsikaliste suuruste seosed, orgaanilise kasvamise mudelid bioloogias, nõudlus- ja pakkumisfunktsioonid ning marginaalfunktsioonid majandusteaduses, materjalikulu arvutused tehnoloogias jne).</td>
<td>Sellel kursusel on vaja käsitleda kaht laadi ülesandeid:
1) ülesanded, mis on n-ö matemaatika enese jaoks ning mille lahendamise tehnilised võtted võivad olla keerukamad (C-tase);
2) tekstülesanded, mis on elulise taustaga või teisest ainevaldkonnast pärit ning kus valdkonna põhiseostele on vihjatud (B-tase).

Ülesannete temaatika: kehade liikumise muutumine, putukate populatsiooni areng, optimeerimisülesanded,</td>
<td>Enne tuleb korrata õppekavas toodud elementaarfunktsioone, funktsiooni tuletise ja integraali leidmist, funktsiooni uurimist (ka tuletise järgi), puutuja võrrandi leidmist, ekstreemumülesande tähendust ja lahendamist. Sama sisuga ülesandeid tuleks sõnastada võimalikult erinevalt.

Kui funktsioonide teemat õpetades uuritakse kõigepealt graafikuid ja seejärel käsitletakse tuletise mõistet, siis siin saab neid kasutada paralleelselt.

Lisaks funktsiooni omadustele tuletatakse meelde pöördfunktsiooni, perioodilise funktsiooni, paaris- ja paaritu funktsiooni tähendusega seonduv.

Aritmeetilise, geomeetrilise ning hääbuva jada kordamise saab siduda lineaar- ja eksponentfunktsiooniga.

Stereomeetria (sirge ja tasand, kehad ruumis, kolmnurk ruumis, kombineeritud kehad) on küll viimane teema, kuid sellel kursusel saab siduda mudeli mõistega just keerukamate ülesannete lahendamise (kui seda ei tehtud eelmisel kursusel).</td>
</tr>
</table>

		ettevõtte tootlikkust käsitlevad ülesanded, materjali kulu, valgustite paigutamine renoveeritavale tänavale, maavarade tarbimine, haiguste levik, maakera rahvaarvu muutumine jne. Ülesannete temaatika: joontega piiratud kujundi pindala ja pöördkeha ruumala, sirgete või parabooli võrrandite koostamine, kombineeritud kehad ning kehade lõiked, kombineeritud jadad.	

Näiteülesanded

A: Kaks autot alustasid punktist *A* ühel ajal sirgjoonelist liikumist erinevas suunas. Esimese auto kiirus oli 90 km/h ja teise auto kiirus 60 km/h. Pärast 2minutist sõitu oli autodevaheline nurk $\varphi = 120^\circ$. Kui kaugel on autod teineteisest pärast 2minutist sõitu? (Katsetöö 2013)

B: 1. Antud on ristkülik. Kui selle pikemat külge pikendada 25% võrra ja lühemat lühendada 2 korda, siis on ristküliku ümbermõõt 26 cm. Kui lühemat külge pikendada 4 cm võrra ja pikemat lühendada 2 cm võrra, siis on ristküliku ümbermõõt 32 cm. Leidke ristküliku külgede pikkused ja diagonaalidevaheline teravnurk.
2. RE 2015 laia II osa 3. ülesanne, RE 2014 laia I osa 6. ülesanne, RE 2014 laia I osa 7. ülesanne.

C: 1. RE 2015 laia II osa 5. ülesanne, RE 2014 laia II osa 5. ülesanne.

2. Sügavkülmik külmetab kuni -16°. Sügavkülmikusse pandud aine temperatuur $y(^{\circ}C)$ muutub aja $x(h)$ jooksul seaduspärasuse $y = 32 \cdot 2^{-x} - 16$ järgi. Mitme tunni pärast on sügavkülmikusse pandud aine temperatuur 0 ^{0}C? (Katsetöö 2013 alaülesanne)			
7) kasutab IKT vahendeid ülesandeid lahendades.	Kursuse käsitlus tugineb arvutusvahendite kasutamisele.	Õppekavas on see oskus eraldi esile toodud, kuid tegelikult sisaldavad kõik eelnevad punktid IKT vahendite rakendamist.	Osa ülesande tehnilisi etappe tasub lahendada IKT vahenditega, et võita aega väljamõtlemise harjutamiseks. Peab hoolitsema, et lahenduskäikude kirjaliku vormistamise harjutamine ning arvutil tehtav ei läheks tasakaalust välja ning õpilasel jääks seetõttu mõni vilumus tagasihoidlikuks.
Näpunäide kordavaks kursuseks.			Kordamisel vajavad suuremat tähelepanu eespool mainimata teemad: algebraliste avaldiste lihtsustamine; juur-, eksponent-, logaritm- ja absoluutväärtust sisaldavad võrrandid; võrratused ja võrratussüsteemid, vektor nii tasandil kui ka ruumis (tehted, pikkus, kollineaarsus, komplanaarsus, ristseis, nurk kahe vektori vahel); joonte võrrandid (sirge, parabool, hüperbool, ringjoon); joonte lõikepunktid; trigonomeetrilised avaldised, võrrandid ja funktsioonid; planimeetria ja stereomeetria; tõenäosus ja statistika.

Lõiming

Sellel kursusel seotakse nii põhikoolis kui ka gümnaasiumis õpitud oskused. Siin on võimalik õpilaste teadmisi ühtlustada ja õppimises tekkinud lünki täita. Lõiming teiste ainetega saavutatakse ülesannete temaatikaga ning loodavate mudelitega.