

Õppekava üldosa taotluste realiseerimine gümnaasiumi matemaatikakursuses

Lea Lepmann, Tartu Ülikool

Gümnaasiumi riikliku õppekava üldosas on esitatud õpetusele üldised sihiseaded, mis on aluseks õpilaste vaimsele, füüsilisele, kõlbelisele, sotsiaalsele ja emotsionaalsele arendamisele. Nendest lähtuvalt kujundab iga õppeaine oma üldisemad eesmärgid.

Õppekava üldosas on esitatud seitse üldpädevust, mille arendamist tuleks kõigis õppeainetes toetada. **Üldpädevuse** all mõistetakse asjakohaste teadmiste, oskuste ja hoiakute kogumit, mis tagab õpilasele suutlikkuse teatud valdkonnas tulemuslikult toimida. Järgnevas kirjeldatakse nende üldpädevuste arendamise olulisemaid võimalusi matemaatikas. Iga üldpädevuse juures esitatakse kõigepealt vastav määratlus õppekava üldosast (kursiivkirjas).

Väärtuspädevuse arendamine

***Väärtuspädevus** on suutlikkus hinnata inimsuhteid ning tegevusi üldkehtivate moraalinormide seisukohast; tajuda ja väärtustada oma seotust teiste inimestega, loodusega, oma ja teiste maade ning rahvaste kultuuripärandiga ja nüüdisaegse kultuuri sündmustega, väärtustada loomingut ja kujundada ilumeelt.*

Õpetajate ülesanne on aidata igal õpilasel selgusele jõuda oma väärtushinnangutes ja välja tuua tema jaoks olulised väärtused (Schihalejev, 2011, lk 23).

Matemaatikaga tegelemine arendab mitmeid isiksuse omadusi, eelkõige järjekindlust, täpsust, püsivust ja ausust. Erinevalt mõnest teisest aineksest on matemaatikat väga raske õppida, kui eelnev osa on halvasti omandatud. Matemaatikas on väga olulised kõigepealt arvutuste, teisenduste ja järelduste täpsus, aga ka eneseväljendamise täpsus. Reeglite punktuaalne järgimine arendab enesedistsipliini: õpilane kogeb, et kui teatud reegleid rikkuda või valemeid valesti kasutada, ei ole võimalik õige lahenduseni jõuda. Üks olulisemaid matemaatikas edasiantavaid väärtusi on püüdlemine asjadest arusaamise poole.

Matemaatika on väga hea õppeaine võimaldamaks õpilasel tajuda eduelamust. See on isiksuse jaoks väga oluline väärtus, mille realiseerimisele – seoses keerukamate ülesannete lahendamise – kaasa aidata saab.

Demokraatlike otsustusprotsesside aluseks on teadmiste kõrval suutlikkus analüüsida ja esitada alternatiive ning oskus teha valikuid, seetõttu on mitmetes kaasaegsetes väärtuskasvatuse mudelites toonitatud argumenteerimise ja põhjendamise oskust (Schihalejev, 2011, lk 21). Matemaatikas õpetamegi oma tegevusi ja valikuid põhjendada, samuti nägema põhjuste paljusust ja võimalike tagajärgede paljusust. Ühele ülesandele eri vaatenurkadest lähenemine ja erinevate lahenduste otsimine soodustavad õpilasel samasuguse mõtteviisi ülekandumist elulistesse kontekstidesse, näiteks mõtlema oma käitumisele kaasõpilaste, õpetajate ja teiste inimeste vaatevinklist lähtudes.

Looduse ja ühiskonna protsesse ning nende seaduspärasusi aitab matemaatikas mõista vastava sisuga tekstülesannete lahendamine. Selle kaudu saab arendada säästvat eluviisi, vastutust, koostööd ja sallivust. On hea, kui koos õpetajaga osatakse neid ülesandeid edasi arendada. Õpilasi võib suunata otsima lisaandmeid, esitama uuritava situatsiooni kohta uusi küsimusi ja nendele vastuseid leidma. Selliselt kujundame ka süsteemset mõtlemist, samuti matemaatika

rakendamise oskust päriselus. Kui kasutada veel lisamaterjali matemaatika ajaloost, saavad õpilased tutvuda eri ajastute ja rahvaste kultuuriga ning tajuda matemaatika rolli kogu inimkultuuri ajaloos.

Ilumeelt saab arendada geomeetriliste kujundite harmoonia ja sümmeetria uurimise kaudu. Õpilasi tuleks suunata nägema geomeetrias õpitut ka ümbritsevas looduses ja arhitektuuris. Kõige olulisem on matemaatikas aga rõhutada püüdlemist ilu ja elegantsi poole oma mõttekäikudes ja loogilistes arutlustes. Kui õpilane on mingile ülesandele leidnud ilusa lahenduse, peaks õpetaja seda alati tunnustavalt ära märkima. Õpilane lahendab ju ülesannet esimest korda ega pruugi ise seda ilu märgatagi.

Matemaatikatunnis võiks teha juttu sellestki, miks me üldse arusaamist, kriitilist mõtlemist või täpsust heaks peame.

Iga matemaatikaõpetaja peaks endalt küsima: kuidas peegelduvad kooli õppekavas sõnastatud väärtused minu käitumises ja õpetamismetoodikas ning kuidas need suunavad õpilasi matemaatika väärtustamisele.

1. Sotsiaalse pädevuse arendamine

Sotsiaalne pädevus on suutlikkus ennast teostada, toimida teadliku ja vastutustundliku kodanikuna ning toetada ühiskonna demokraatlikku arengut; teada ning järgida ühiskonnas kehtivaid väärtusi ja norme ning erinevate keskkondade reegleid; teha koostööd teiste inimestega erinevates situatsioonides; aktsepteerida inimeste erinevusi ning arvestada neid suhtlemisel.

Vastutustundlikku käitumist ühiskonnaliikmena saab matemaatikas kasvatada eeskätt sellesuunaliste tekstülesannete lahendamise kaudu. Matemaatilise statistika teemasid õppides on kasulik läbi viia ühiskonda puudutavaid küsitlusi ja nende tulemusi matemaatikateadmiste abil kirjeldada. Samuti saab suunata õpilasi andmeanalüüsiks päevakajalisi materjale otsima ajakirjandusest või internetist selleks, et neid matemaatiliselt interpreteerida. Kirjeldatud tegevusest võivad välja kasvada ka XI klassi lõpuks valmiva uurimistöö teemad.

Nii sotsiaalse pädevuse arendamise kui ka matemaatika mõtestatud õppimise aspektist on väga oluline arendada tunnis õpilastevahelist koostööd. Koostöö võib seisneda keerukale ülesandele ühiselt lahenduskäigu otsimises, kaaslasele õige lahenduskäigu seletamises või mingi rutiinse oskuse harjutamises nii, et pinginaabrid vaheldumisi küsivad ja vastavad. Sellise töö käigus kasvab õpilase julgus küsida teistelt selgitusi, esitada oma ettepanekuid ja neid põhjendada, oskus hinnata kaaslaste lahenduste õigsust. Kõige selle kaudu süveneb materjalist arusaamine ja areneb ka oskus ennast matemaatiliselt väljendada. Kindlasti saab iga õpetaja leida sobivaid võimalusi, et traditsiooniline õpetaja ja õpilaste vaheline koostöö asendada mõnes tunnis õpilastevahelise koostööga.

Singapuris läbiviidud uurimused on näidanud, et õpilastevaheline koostöö soodustab kõigi õpilaste arengut, sealhulgas ka nõrgemate õpilaste oma, kelle huvi nn akadeemilisemate õppeainete vastu ei ole eriti suur (Lui & Toh & Chung, 2009).

Sotsiaalset pädevust arendavad ka ühiselt läbiviidavad uurimused ja projektitööd. Tasuks mõelda, kuidas saab matemaatikat lülitada kooli traditsiooniliste ürituste sekka (ainenädal, viktoriin, peastarvutamine vms). Nende ühisürituste ettevalmistamisse saab iga õpilane panustada vastavalt oma huvidele ja võimetele.

Matemaatika õppimine ei ole kõigile õpilastele ühtviisi kerge ja tulemuslik. Seetõttu tuleb nii kaasõpilastel kui ka õpetajal sellest tulenevaid erinevusi aktsepteerida.

2. Enesemääratluspädevuse arendamine

Enesemääratluspädevus on suutlikkus mõista ja hinnata iseennast, oma nõrku ja tugevaid külgi; järgida terveid eluviise; leida lahendusi iseendaga, oma vaimse ja füüsilise tervisega seonduvatele ning inimsuhetes tekkivatele probleemidele.

Oma matemaatilisi võimeid peab õpilane hindama juba gümnaasiumi tulles, kui ta valib kitsa või laia matemaatikakursuse vahel. Kui õpetaja tunneb, et see valik ei osutunud õigeks, peaks ta sellest õpilasega rääkima ja leidma talle võimaluse kursuse vahetamiseks.

Et õpilane suudaks adekvaatselt hinnata oma tugevusi ja nõrkusi matemaatikas, peab ta saama ülesandeid lahendada täiesti iseseisvalt, ilma kaaslaste või õpetaja abita. See võimalus avaneb õpilasel kindlasti kontrolltööde kirjutamise käigus ja ka koduste ülesannete lahendamisel. Iseseisva tegutsemise väljakujunemine matemaatikas eeldab pikaajalist ja järjekindlat tööd. Matemaatikas edukate maade metoodikas rõhutatakse õpilase iseseisvuse arendamist väga tugevalt juba põhikoolis. Iga keerukama probleemülesande lahendamine algab sellest, et kõik õpilased süvenevad üksi ülesandesse ja püüavad leida lahendust. Õpetaja saab klassis ringi liikudes ja lehekesele märkmeid tehes hinnata ülesandest arusaamist, toetada nõrgemaid ja valida välja need õpilased, kes selgitavad oma lahendust teistele tahvli juures (Ninomiya, 2007).

Enesemääratluspädevuse arendamiseks on oluline suunata õpilast oma arengut jälgima pikema perioodi jooksul. Üks hea võimalus selleks on õpimapi kasutamine. Kuigi mapiõpe ei ole matemaatikaõpetajate hulgas eriti populaarne, tasuks seda siiski proovida. See ergutab õpilasi oma töid analüüsima, samuti aitab matemaatikateadmisi süstematiseerida (Asula, 2009). Oskuslikult mappi kogutud kolme aasta materjalid võimaldavad kindlasti paremini valmistuda gümnaasiumi matemaatika riigieksamiks.

3. Õpipädevuse arendamine

Õpipädevus on suutlikkus organiseerida õpikeskkonda ja hankida õppimiseks vajaminevat teavet; planeerida õppimist ning seda plaani järgida; kasutada õpitut, sealhulgas õpioskusi ja -strateegiaid, erinevates kontekstides ning probleeme lahendades; analüüsida enda teadmisi ja oskusi, tugevusi ja nõrkusi ning selle põhjal edasiõppimise vajadust.

Matemaatika uues ainekavas rõhutatakse kõigil kooliastmetel ainest arusaamist, mis on eduka õppimise alus. Seega on tunnis tarvis kasutada selliseid meetodeid, kus õpilasel oleks võimalus materjali tunnetada sügavuti, uurida ise seoseid, tuua oma näiteid, selgitada ja põhjendada oma mõttekäike ning reflekteerida oma tegevust. Reflekteerides peaks õpilane oskama vastata küsimustele: mida ma teen; milleks ma nii teen; kuidas ma toimin, milleni ma jõudsin ja kas see, milleni ma jõudsin, ka õige on. Tasub meenutada konstruktivismi ühe rajaja, Šveitsi psühholoogi J. Piaget' lauset: aru saada – see tähendab ise välja mõelda. Kuigi sageli meeldib õpilastele saada õpetajalt valmisteadmisi, võib selle liigne rakendamine muuta õpilased lõppkokkuvõttes abituks, eriti uudses situatsioonis tegutsemisel.

Üldist õpipädevust arendab matemaatikas eriti nn probleemülesannete lahendamine, mille käigus arenevad analüüsi- ja sünteesioskus, üldistamise ja analoogia kasutamise oskus ja seeläbi oskus õpitut üle kanda uude konteksti. Sellest aga lähemalt matemaatikapädevuse juures.

Matemaatika õppimisel tuleb rõhutada ka järjepidevuse olulisust. Iga õpilane peaks mõistma, et tekkinud lüngad teadmistes on vaja likvideerida võimalikult varakult. Õpilast tuleb suunata oma vigadest õppima. Ka valet lahenduskäiku on kasulik analüüsida (vahel koos kaasõpilastega), et jõuda oma eksimuste sisulise mõistmiseni.

4. Suhtluspädevuse arendamine

***Suhtluspädevus** on suutlikkus ennast selgelt ja asjakohaselt väljendada, arvestades olukordi ja suhtluspartnereid, oma seisukohti esitada ja põhjendada; lugeda ning mõista teabe- ja tarbetekste ning ilukirjandust; kirjutada eri liiki tekste, kasutades kohaseid keelevahendeid ja sobivat stiili; väärtustada õigekeelsust ning väljendusriikast keelt.*

Matemaatika ülesandeks on arendada õpilastes selget ja täpset väljendusviisi. Oluline on ka teksti mõistmise arendamine esimesest kooliastmest alates. Eeskätt toimub see tekstülesannete lahendamise kaudu, kus andmete ja otsitavate vaheliste seoste paremaks mõistmiseks kasutatakse erinevaid visualiseerimise võimalusi.

Matemaatika on see õppeaine, kus õpilane õpib tundma erinevaid info esitamise viise nagu tabel, joonis, diagramm, graafik, valem jne. Omandatakse ka vastava info tõlgendamise oskused. Nimetatud esitusviise kasutatakse teisteski õppeainetes ja eluvaldkondades. Selle pädevuse arendamist tutvustatakse lähemalt matemaatikapädevuse juures.

5. Ettevõtlikkuspädevuse arendamine

***Ettevõtlikkuspädevus** on suutlikkus ideid luua ja neid ellu viia, kasutades omandatud teadmisi ja oskusi erinevates elu- ja tegevusvaldkondades; näha probleeme ja neis peituvaid võimalusi; seada eesmärged ja neid ellu viia; korraldada ühistegevusi, näidata initsiatiivi ja vastutada tulemuste eest; reageerida paindlikult muutustele ning võtta arukaid riske*

Ettevõtlikkuspädevuse arendamiseks on matemaatika väga sobiv õppeaine. Ühelt poolt saab seda teha üldkognitiivsete pädevuste arendamise kaudu. Ülesandele iseseisvalt lahendustee otsimine ja selleks ideede genereerimine, paindlik mõtlemine (erinevad lahendusteed, õpitu erinevad rakendused), oma mõttekäikude põhjendamine, hüpoteeside püstitamine ja nende tõesuse kontroll – kõik need tegevused arendavad iseseisvalt otsustada suutvat isiksust. Teiselt poolt aitab ettevõtlikkuspädevuse arendamisele kaasa mitmete gümnaasiumi matemaatikateemade õppimine. Eeskätt puudutab see funktsioonidega seotud teemasid: suurustevaheliste seoste matemaatiline esitamine valemiga või graafiliselt; suuruse muutumise uurimine sõltuvalt selles esinevatest parameetritest; ekstreemumite leidmine, mis elus tähendab optimaalse variandi otsingut. Teine oluline ettevõtlikkust arendav teemadering seondub matemaatilise statistika ja tõenäosusteooriaga: kogutud andmete statistiline analüüs ja tõlgendamine; valimi alusel hinnangute andmine üldkogumile; erinevate sündmuste esiletuleku võimaluste arvutamine ja riskide hindamine jne. Kõigi nimetatud teemade juures tuleks lahendada ka elulisi ülesandeid ja saadud tulemusi interpreteerida. Eriti soovitatav on lasta õpilastel endil otsida vastavaid andmeid tegelikust elust.

7. Matemaatikapädevuse arendamine

Matemaatikapädevus on suutlikkus kasutada matemaatikale omast keelt, sümboleid ning meetodeid erinevaid ülesandeid lahendades kõigis elu- ja tegevusvaldkondades.

Uues matemaatika ainekavas võib selgelt eristada nn puht ainealaseid pädevusi ja üldisemaid matemaatikapädevusi. Selliselt on üles ehitatud paljude maade ainekavad. Ainealaseid pädevusi nimetatakse tavaliselt **sisu** pädevusteks ja üldisemaid pädevusi **protsessi** pädevusteks (USA haridusstandardites) või **matemaatika üldkognitiivseteks** pädevusteks (Saksamaa haridusstandardites). Meie senistes ainekavades on pööratud olnud ainealastel pädevustel. Kuid aine sisu omandatakse alati õppimisprotsessi käigus ja seetõttu püütaksegi praeguses ainekavas neid kahte pädevust koos käsitleda. See peaks andma õpetajatele ja õpikute autoritele selgemaid suuniseid, kuidas sisu omandamist efektiivsemalt korraldada ja milliseid üldisemaid püsivaid oskusi matemaatika õppimise kaudu arendada.

Matemaatika ainekavas täpsustatakse õppekava üldosa teksti järgmiselt.

Matemaatikapädevus tähendab matemaatiliste mõistete ja seoste süsteemset tundmist, samuti suutlikkust kasutada matemaatikat temale omase keele, sümboolite ja meetoditega erinevate ülesannete modelleerimisel nii matemaatika sees kui ka teistes õppeainetes ja eluvaldkondades. Matemaatikapädevus hõlmab üldist probleemi lahendamise oskust, mis sisaldab endas oskust probleeme püstitada, sobivaid lahendusstrateegiaid leida ja neid rakendada, lahendusideed analüüsida, tulemuse tõesust kontrollida. Matemaatikapädevus tähendab loogilise arutlemise, põhjendamise ja tõestamise oskust, samuti erinevate esitusviiside (sümbolid, valemid, graafikud, tabelid, diagrammid, tekst) mõistmise ja kasutamise oskust. Matemaatikapädevus hõlmab ka huvi matemaatika vastu, matemaatika sotsiaalse, kultuurilise ja personaalse tähenduse mõistmist ning info- ja kommunikatsioonitehnoloogia võimaluste kasutamist.

Kokkuvõtvalt rõhutatakse ainekavas viit erinevat matemaatilist üldpädevust. Neid arendatakse sisuliselt edasi kõigis klassides. Järgnevas tutvustataksegi lähemalt vaadeldavate pädevuste arendamist kõigis kooliastmetes. Selle kaudu saab gümnaasiumiõpetaja ülevaate ka põhikooli vastavatest taotlustest. Iga pädevuse puhul on tabelites kursiivkirjas esitatud vastavad väljavõtted põhikooli või gümnaasiumi ainekavast.

7.1. Probleemi lahendamine

I kooliaste	<i>Õpilane: oskab ohuolukordi analüüsida ning jõuab olemasolevatest faktidest arutluse kaudu järeldusteni;</i>
II kooliaste	<i>leiab ülesandele erinevaid lahendusteid; tunneb probleemülesande lahendamise üldist skeemi; näitab üles initsiatiivi lahendada kodus ja koolis ilmnevaid matemaatilisi laadi probleeme;</i>
III kooliaste	<i>koostab ja rakendab matemaatilisi mudeleid erinevate eluvaldkondade ülesandeid lahendades;</i>
IV kooliaste	<i>arutleb loovalt ja loogiliselt, leiab probleemülesande lahendamiseks sobivad strateegiad ja rakendab neid.</i>

Alates II kooliastmest tuleks loovuse arendamise seisukohast suunata õpilasi pidevalt leidma ühe ja sama ülesande lahendamiseks erinevaid teid. Mõnikord on kasulik anda õpilasele ette mitu

erinevat lahenduskäiku (mille hulgas võib olla ka valesid) ja lasta selgitada, millistega ta nõustub ja miks.

Täiesti uus pädevus II kooliastme ainekavas on probleemülesande lahendamise üldise skeemi tundmine. Hästi sobib kasutamiseks näiteks G. Pólya skeem: ülesandega tutvumine, lahenduse otsimine, lahendamine, lahenduse kontroll (Pólya, 2001). Selle järgi tuleks paari koolitunni vältel harjutada skeemi rakendamist sügavuti nii, et põhitähelepanu ongi skeemil endal, mida illustreeritakse konkreetsete ülesannete abil. Erilist tähelepanu vajab seejuures 1. etapp: ülesande sisuga tutvumine ja selle juures kasutatav visualiseerimine, andmete süstematiseerimine, andmetevaheliste seoste kujutamine.

III kooliastmel lisanduvad keerukamad tekstülesanded erinevate mudelite koostamiseks (võrrand, funktsionaalsed seosed nagu võrdeline, pöördvõrdeline ja lineaarne seos, diagrammid). Olulisema tähenduse omandab oskus valida sobivat mudelit ja oskus sellega saadud tulemusi tõlgendada igapäevaelu kontekstis. Matemaatiliste mudelite koostamise erinevaid võimalusi õpitakse juurde ka gümnaasiumis.

Et õpilastel süveneks probleemülesannete lahendamise oskus, on kasulik neile tutvustada ka probleemülesande lahendamise üldisi strateegiaid (nt joonise tegemine, seaduspärasuste uurimine, lihtsama juhu vaatlemine, kõigi võimaluste väljatoomine, arutlemine tagasisuunas, piirjuhu vaatlemine). Ülesande lahendamise järel tuleks suunata õpilasi korraks tagasi vaatama ja mõtlema sellele, millist strateegiat ta lahendamisel kasutas. Paljude ülesannete juures on võimalik ülesannet edasi arendada uute küsimuste püstitamise teel, samuti üldistamise teel.

Gümnaasiumis on ka uute mõistete ja seoste õppimine mõistlik üles ehitada probleemõppele. Järgnevas selleks mõned näited.

Determinantide omadused saavad X klassi õpilased ise avastada ja sõnastada, kui anda neile arutamiseks oskuslikult valitud determinante.

Kaherealiste determinantide juures võrdleme nt determinantide

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} \text{ ja } \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 3 & -21 \end{vmatrix}$$

väärtusi ja uurime arvudevahelisi seoseid ridades (veergudes).

Kolmerealiste determinantide juures pöördume taas analoogilise ülesande juurde, kus determinandis leidub kaks võrdelist rida või veergu. Mõlemal juhul on lihtne leitud omadusi üldkujul tõestada.

Ratsionaalarvulise astendajaga astme definitsiooni võiks X klassis ette valmistada järgmiste

avaldiste väärtuste arvutamise ja võrdlemisega: $(\sqrt{5})^2$ ja $\left(5^{\frac{1}{2}}\right)^2$, $(\sqrt[3]{a})^3$ ja $\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3$, $(\sqrt[n]{a})^n$ ja

$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n$ jne. Teades, et $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}}$, suudavad õpilased ilmselt anda soovitus defineerida

ratsionaalarvulise astendajaga aste järgmiselt: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Sellele tuleb lisada veel vajalikud tingimused kõigi muutujate lubatavate väärtuste kohta.

XI klassis funktsioonide omadusi uurides võib arvutiprogrammi *GeoGebra* abil samasse teljestikku joonestada funktsioonide $y = x^3$, $y = (x-2)^3$ ja $y = (x+1)^3$ graafikud, teise teljestikku näiteks funktsioonide $y = x^2$, $y = (x-1)^2$ ja $y = (x+3)^2$ graafikud ning rühmas

arutleda ja kirjutada raport, kuidas on funktsiooni $y = f(x)$ graafiku abil võimalik saada funktsiooni $y = f(x + a)$ graafikut.

XII klassis võrranditega antud sirge ja tasandi vastastikuste asendite uurimisel saab samuti panna õpilased iseseisvalt juurdlema selle üle, millised suurused on kummastki võrrandist välja loetavad ja milliseid vastastikuseid tingimusi need igal erineval juhul peaksid rahuldama. Sellise võtte puhul ei pea õpilased vastavaid tingimusi lihtsalt pähe õppima, vaid nad saavad need vajadusel loogiliselt välja mõelda.

Pädevus *probleemi lahendamine* on matemaatilise mõtlemise alus. Oskus lahendada probleemülesannet sisaldab selliseid oskusi nagu vaatlus, katsetamine, analüüs (terviku alaosadeks jaotamine), süntees (üksikosade kokkupanek), üldistamine, konkretiseerimine, analoogia kasutamine, induktiivne ja deduktiivne järeldamine, loov mõtlemine jne. Jaapanis arvatakse, et matemaatika õpieesmärkide saavutamine on paremini tagatud sel juhul, kui õpilastele antakse väljakutset pakkuvaid ülesandeid. Sageli lahendatakse tunnis vähe ülesandeid, tähtsamale kohale on seatud õpilaste poolt leitud erinevate lahenduste analüüs. Õpetajad julgustavad õpilasi mõtlema, samuti töötama paaris või väikestes rühmades (Shimizu, 2009).

7.2. Põhjemine ja tõestamine

I kooliaste	-
II kooliaste	<i>Õpilane: põhjemine oma mõttekäike ja kontrollib nende õigsust;</i>
III kooliaste	<i>püstitab hüpoteese ja kontrollib neid; üldistab ning arutleb loogiliselt; põhjemine oma väiteid, on omandanud esmase tõestusoskuse;</i>
IV kooliaste	<i>püstitab matemaatilisi hüpoteese, põhjemine ja tõestab neid.</i>

Tõestamine on matemaatikas peamine uute tulemusteni jõudmise viis. Seetõttu on oluline seda meetodit rakendada juba koolis. Põhjemine ja tõestamine peaksid tähelepanu pälvida alates II kooliastmest. Esialgu seisneb **põhjemine** oma tegevuse või pikema lahenduskäigu suulises kommenteerimises ja kontrollimises.

III kooliastmel omandab suurema tähenduse hüpoteeside püstitamine. Õpilasi tuleks suunata märkama üldist ja leidma seaduspärasusi tehete tulemustes, arvjadades, algebralistes avaldistes või geomeetrilistes kujundites. Asutakse üksikuid põhjemusi ühendama järjestikuseks põhjemuste ketiks ehk **tõestuseks**. Tutvutakse tõestuse olemusega. Oluline on põhjalikult keskenduda eelduse ja väite sisule (mis on antud, mida tuleb tõestada). Näiteks teoreemi *Rombi diagonaalid on risti* korral on vaja arutleda, mida täpsemalt tähendab eeldus *nelinurk on romb*, millised seosed saab rombi definitsioonist lähtudes võtta eelduseks.

IV kooliastmel taotletav pädevus *püstitab matemaatilisi hüpoteese* tähendab, et ka uute matemaatiliste seoste märkamine ja sõnastamine peaksid toimuma õpilaste poolt. Vastavaid näiteid on esitatud eelmises alapunktis 7.2. Ka õpikus valmiskujul esitatud teoreemide tõestamine võiks alata hüpoteesi püstitamisest ja selle sõnastamisest õpilaste poolt. Näiteks siinusteoreemi korral saab (arvuti abil) eelnevalt uurida külgede pikkuste ja nurkade siinuste vahelisi seoseid erinevates kolmnurkades. Vastavad andmed võib kanda tabelisse, millest vajalik seos paremini nähtav on.

Tõestamise roll ei seisne vaid selles, et näidata mingi väite tõesust. Tõestamine aitab luua üksikteadmistes süsteemi. Kahe teadaoleva seose põhjal uue seose loomise oskus on vajalik ka probleemülesannete lahendamisel.

7.3. Kommunikatsioon

Kommunikatsioon tähendab oskust oma matemaatilist mõtet verbaalselt ja kirjalikult esitada ja vastupidi – saada aru kirjalikust või suulisest matemaatilisest teabest. Kommunikatsioon võib olla mingi reegli, idee või lahenduskäigu selgitamine teistele, oma arusaamise esitamine mingist protseduurist, loetud tekstist jne.

I kooliaste	<i>Õpilane: saab aru õpitud reeglitest ja oskab neid täita; loeb, mõistab ja edastab eakohaseid matemaatilisi tekste;</i>
II kooliaste	<i>põhjendab oma mõttekäike ja kontrollib nende õigsust (kommunikatsiooni alla käib nende sõnastamine);</i>
III kooliaste	<i>püstitab hüpoteese ja kontrollib neid; üldistab ning arutleb loogiliselt; põhjendab oma väiteid, on omandanud esmase tõestusoskuse (kommunikatsiooni alla käib nende sõnastamine);</i>
IV kooliaste	<i>mõistab ja analüüsib matemaatilisi tekste, esitab oma matemaatilisi mõttekäike nii suuliselt kui ka kirjalikult; kasutab matemaatilises tegevuses erinevaid teabeallikaid ja hindab kriitiliselt neis sisalduvat infot.</i>

Matemaatilisest tekstist arusaamist tuleb õpetada alates esimesest klassist. Esialgu loetakse õpiku teksti koos ja seletatakse seda oma sõnadega.

II kooliastmel võiks seada eesmärgiks, et õpilane *selgitab oma tegevusi teistele*. Seega võiks põhitähelepanu olla suunatud eeskätt **suulise kommunikatsiooni** arendamisele ja seeläbi ka tehtust arusaamisele. Mõelda tuleks ka sellele, kuidas järk-järgult harjutada õpilast iseseisvalt aru saama õpiku teooriaosast.

III kooliastmel tuleks tabelis nimetatud tegevuste juures suuremat tähelepanu pöörata **kirjalikule kommunikatsioonile**: ülesande lahenduskäikude või tõestuskäikude esitamisele, hüpoteeside sõnastamisele jne.

Kuna uue õppekava kohaselt tuleb igal gümnaasiumi lõpetajal sooritada kirjalik eksam matemaatikas, omandab kommunikatiivne pädevus siin senisest suurema tähenduse. Gümnaasiumis tuleks õpilasi suunata otsima teavet erinevatest käsiraamatutest, aga ka internetist. Selle juures tuleks lasta õpilastel kriitiliselt hinnata saadud teavet.

7.4. Seoste loomine

Seoste loomine tähendab oskust ühendada oma matemaatikateadmisi tervikuks, samuti oskus seostada erinevates ainetes omandatud teadmisi ja neid elulistes situatsioonides rakendada.

I kooliaste	<i>Õpilane: liigitab ümbritseva maailma esemeid, võrdleb neid 1-2 tunnuse järgi;</i>
II kooliaste	<i>liigitab objekte ja nähtusi ning analüüsib ja kirjeldab neid mitme tunnuse järgi;</i>
III kooliaste	<i>näeb seoseid erinevate matemaatiliste mõistete vahel, loob neist süsteemi;</i>
IV kooliaste	<i>on omandanud süsteemse ülevaate matemaatika erinevate valdkondade mõistetest, seostest ning protseduuridest, mõistab ümbritsevas maailmas valitsevaid kvantitatiivseid, loogilisi, funktsionaalseid, statistilisi ja ruumilisi seoseid; rakendab matemaatikat teistes ainetes.</i>

I kooliastmel suunatakse õpilast leidma ja kirjeldama objektide ühesuguseid omadusi, nt leidma jooniselt kõiki nelinurki, kõiki kahekohalisi arve jne.

II kooliastmel toimub objektide liigitamine juba mitme tunnuse järgi, näiteks kolmnurkade liigitamine samaaegselt nii külgede kui ka nurkade järgi (tabelisse joonistatakse sobiv näide).

III kooliastmel tuleks juba selgemalt suunata õpilast nägema seoseid õpitud mõistete ja teemade vahel: nt murdarvutus-protsentarvutus, aritmeetika-algebra, algebra-geomeetria. Võrdelise seose õppimisel saab näiteks tuua ringjoone pikkuse arvutamise valemi, teravnurga trigonomeetriliste funktsioonide juures saab suunata nägema võrdelist seost. Õpetaja peaks kindlasti aitama õpilastel selliseid seoseid luua ja kergendada seeläbi materjali meeldejätmist.

Gümnaasiumi lõpuks peaks õpilane tunnetama erinevate teemade vahelisi seoseid juba sügavamalt. Eriti häid võimalusi pakuvad selleks algebra ja funktsioonide teemad. Võrrandite ja võrratuste lahendamise oskust on vaja funktsiooni uurimisel, kuid samas toetub mitmete võrratuste lahendamine funktsiooni graafikutele. Kasulik on ühe ja sama ülesande lahendamisel suunata erinevaid seoseid nägema. Näiteks võrratuse $x^2 < 9$ võib lahendada algebraliselt, kasutades korrutise negatiivsuse tingimust võrratuses $(x-3)(x+3) < 0$. Samuti võib asendada esialgse võrratuse temaga samaväärse võrratusega $|x| < 3$ ja lahendada viimane võrratus algebraliselt.

Samas võib võrratust lahendada erinevate funktsioonide graafikutele tuginedes:

- leida graafikult, millal on funktsiooni $y = x^2 - 9$ väärtused negatiivsed;
- leida, milliste x väärtuste korral on funktsiooni $y = x^2$ väärtus väiksem funktsiooni $y = 9$ väärtusest;
- asendada esialgne võrratus temaga samaväärse võrratusega $|x| < 3$ ja lahendada viimane võrratus funktsioonide $y = |x|$ ja $y = 3$ graafikute abil.

Väga heaks vahendiks seoste loomise oskuse kujundamisel on mõistekaartide ja mõttekaartide koostamine. See võimaldab visuaalselt kujutada mingi suurema teema mõisteid nii, et nendevahelised seosed on korraga haaratavad. Hea on, kui mõistekaarte koostavad õpilased ise, mitte õpetaja. Neid on igapähe kasutada riigieksamiks valmistumisel.

Oluline on seostada matemaatikat ka elu ja teiste ainetege. Suureks abiks õpetajale on selle juures elektrooniline kogumik „Lõiming. Lõimingu võimalusi“ (2010).

7.5. Representatsioon (esitamine)

Matemaatikas õpitakse järgmisi **info esitamise viise**: avaldis, valem, võrrand, võrratus, graafik, tabel, diagramm, pilt, tekst, konkreetse mudelid (nt kehad). Kõiki neid esitusviise kasutatakse ka teistes õppeainetes, kuid enamiku esitusviiside sisuline mõistmine tuleb kujundada just matemaatikas.

I kooliaste	<i>Õpilane: näeb matemaatikat ümbritsevas elus ja kirjeldab seda arvude või kujundite abil;</i>
II kooliaste	<i>kasutab erinevaid matemaatilise info esitamise viise ning oskab üle minna ühelt teisele;</i>
III kooliaste	<i>koostab ja rakendab sobivaid matemaatilisi mudeleid erinevate eluvaldkondade ülesandeid lahendades;</i>
IV kooliaste	<i>oskab igapäeva elu probleemi esitada matemaatilises keeles, seda interpreteerida ja kriitiliselt hinnata; tõlgendab erinevaid matemaatilise info esitamise viise (tabel, graafik, valem, diagramm, tekst), oskab valida sobivat esitusviisi, üle minna ühelt esitusviisilt teisele.</i>

I kooliastmes loendab õpilane objekte, teeb eluliste ülesannete lahendamiseks tehteid naturaalarvudega, tunneb ümbritsevast ära tasandilisi ja ruumilisi kujundeid.

II kooliastmes õpetatakse mitmeid uusi esitusviise kasutama ühekaupa, nt lugema andmeid graafikult. Seejärel õpitakse ka ühelt viisilt teisele üleminekut, näiteks hariliku murru kujutamist arvkiirel või geomeetriliselt osana ristkülikust.

III kooliastmes tuleb juurde oskus valida õpitud viiside seast antud situatsiooni kirjeldamiseks sobivat esitusviisi, võrrelda ja hinnata erinevate esituste sobilikkust, tõlgendada erinevatel viisidel esitatud infot, minna tavakeelelt üle formaalsele sümbolite keelele ja vastupidi. Kõrgeim tase on oskus töötada paralleelselt mitme esitusviisiga (nt osa lahendamiseks vajalikest andmetest tuleb lugeda tabelist ja osa andmetest leida sektordiagrammilt).

Gümnaasiumis tuleks kõiki eeltoodud pädevusi edasi arendada. Kõige rohkem peaks fookuses olema teabe esitamine matemaatiliste avaldiste või valemite abil, süvenevad ka teadmised funktsioonide graafikutelt loetava info osas.

Ka erinevate esitusviiside seostamist ja üleminekut ühelt viisilt teisele saab kõige paremini arendada ühte ülesannet eri viisidel lahendades. Näiteks vaatleme X klassi õpikus (Lepmann, Velsker, 2011, lk 119) lineaarvõrratuse teema juures olevat ülesannet

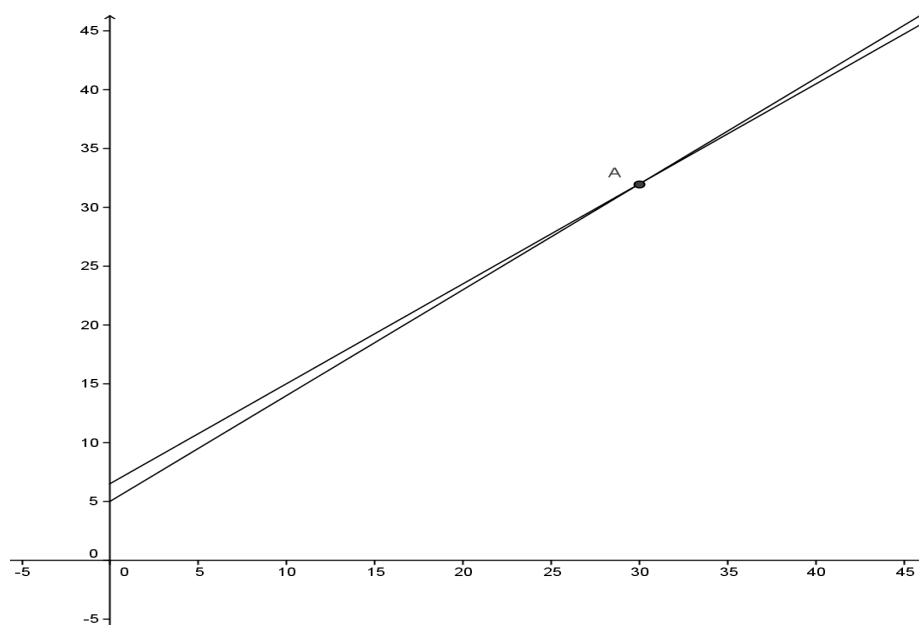
Tabelis on kahe autosid laenutava firma andmed. Milline peaks olema autoga läbisõidetavate kilomeetrite arv, et auto laenutamine firmast B oleks odavam kui firmast A?

	Tellimistasu	Tasu läbisõidu eest
Firma A	5 eurot	0,90 € / km
Firma B	6,5 eurot	0,85 € / km

Üks viis ülesande lahendamiseks oleks koostada läbisõitudele vastav hindade tabel.

Teine viis oleks koostada võrratus $6,5 + 0,85x < 5 + 0,9x$ ja see lahendada.

Kolmas viis oleks seostada ülesanne vastavate lineaarfunktsioonide graafikutega, mille abil saab visuaalselt hinnata ka laenutaja (või firma) kasumi või kahjumi suurust.



Viie vaadeldud matemaatilise üldpädevuse arendamine peaks toimuma kõigi matemaatikateemade õppimise käigus nii, et rutiinsete harjutusülesannete kõrval püsib õpetaja teadvustatud tähelepanu kõrgemate pädevuste tasandil, kuid ka kitsa matemaatikakursuse õppijad peavad omandama kõik vaadeldavad pädevused, vaid tõestamisoskuse kujundamine ei ole seal omaette eesmärgiks.

Kirjandus

Asula, A. (2009). *Õpimapi kasutamise kogemusi matemaatikas*. Külastatud 1.10.2011 aadressil http://mott.edu.ee/component/option,com_remository/Itemid,28/func,fileinfo/id,173/

Lepmann, L., Lepmann, T., Velsker, K. (2011). *Matemaatika X klassile*. Tln: Koolibri.

Lui, H.W.E., Toh, T.L., Chung, S.P. (2009). Positive social climate and cooperative learning in mathematics classrooms. *Mathematics education. The Singapore journey*. Singapore World Scientific Publishing Co, 337–354.

Lõiming. Lõimingu võimalusi. (2010). Külastatud 13.09. 2011 aadressil <http://www.ut.ee/curriculum/kogumikud>

Ninomiya, H. (2007). How do Japanese teachers evaluate their students in their lessons? *Japanese lesson study in mathematics. It's impact, diversity and potential for educational improvement*. Singapore: World Scientific Publishing Co, 68–71.

Pólya, G. (2001). *Kuidas seda lahendada*. Tln: Valgus.

Schihalejev, O. (2011). *Väärtuskasvatus õpetajakoolituses*. Tartu: TÜ Kirjastus.

Shimizu, Y. (2009). Japanese approach to teaching mathematics via problem solving. *Mathematical problem solving. Yearbook 2009. Association of mathematics educators*. Singapore: World Scientific Publishing Co, 89–101.