Probleemülesannete lahendamise oskuse arendamine põhikoolis

Lea Lepmann, Tartu Ülikool

1. Probleemõppe olemusest

Loovalt ja loogiliselt arutlemise oskuse arendamine on matemaatikaõpetuse üheks olulisemaks eesmärgiks. See oskus pole vajalik mitte ainult matemaatikaülesannete, vaid ka elus ette tulevate igapäevaste probleemide edukaks lahendamiseks. Arvatakse, et viljakaim aeg loova ja loogilise mõtlemise õppimiseks on 7. – 9. klass, mil õpilased on oma mõtlemise tasemelt jõudnud nn formaalsete operatsioonide staadiumi.

Probleemiga (probleemülesandega) on tegemist siis, kui õpilasel ei ole selle lahendamiseks teada mingit valmis reeglit, vaid ta peab lahendamiseks olemasolevaid teadmisi kombineerima mingil uudsel viisil. See, kas ülesanne on probleem või mitte, sõltub eeskätt lahendajast. Üks ja sama ülesanne võib olla ühele probleemülesanne, teisele aga mitte. Probleemülesanded peaksid kuuluma iga matemaatikateema koosseisu.

Probleemülesande lahendamisest saame rääkida siis, kui **lahendusidee on sündinud õpilase peas**, õpetaja on sellele vaid natuke kaasa aidanud.

Sageli juhtub probleemülesannet lahendades, et me ei näe ülesandele mingit lahendust: katsetame ühel ja teisel viisil, aga ükski neist ei vii sihile. Kui aga järgmisel päeval mõtted uuesti ülesande juurde lähevad, tuleb hiilgav idee nagu iseenesest. Nii võib olla mingi matemaatikaülesande lahendusega, unustatud nime meenutamise või muu sellisega. Kõigile neile juhtudele on iseloomulik, et ülesanne pöördub mõne aja möödudes ise teadvusse tagasi palju selgemal kujul. Sellisele nn alateadlikule mõtlemisele andis selgitused Jacques Hadamard. Tema arvates polegi probleemülesande lahendusidee puhtalt teadliku mõistuse tulemus, vaid teatud osa lahendusest toimub inimese alateadvuses. Sellele viitavad ka näiteks tuntud vanasõnad *hommik on õhtust targem* või *mis täna halvasti, see homme uuesti*. J. Hadamard kirjeldab alateadvuslikku mõtlemist järgmiste etappidena (Hadamard, s.a.):

- **ettevalmistusperiood**: teadlik tutvumine probleemiga, mis lõpeb sellega, et ei nähta lahendust ja ülesanne tunnistatakse tuttavate võtete abil mittelahenduvaks;
- **inkubatsioon, küpsemisperiood**: väliselt nagu ei toimuks midagi, kuid inimese alateadvuses tekivad erinevad ideed;
- **lahenduse leidmine**: äkiline “taipamine” – korraga saab selgeks, kuidas lahendada;
- **lahenduse vormistamine ja kontroll**: veendutakse idee õigsuses, tehakse see lahenduse vormistuse kaudu ka teistele arusaadavaks.

Kuid arvestada tuleb sellega, et ülesande lahendusidee ja selgus tekivad alateadvuses vaid sel juhul, kui ülesande kallal on eelnevalt pingsalt mõtiskletud – teadlik jõupingutus on alateadliku töö toimumise vajalik eeldus.

Kuna probleemi lahendamisest mingi osa toimub alateadvuses, on seetõttu raske täpselt kirjeldada probleemülesande lahendamise protsessi, seega ka õpetada selliseid ülesandeid lahendama. Kuidas õpetada lahendusideed välja mõtlema ehk tegutsema olukorras *mida teha siis, kui ei tea, mida teha?*

Probleemi lahendamist saab õppida eeskätt ülesannete iseseisva lahendamise kaudu. Õpilane peab omandama nii palju iseseisva töö kogemusi kui vähegi võimalik (Pólya, 2001, lk 11; Lace, 2010). Samas on väga tähtis, et õpilane ei oleks oma probleemiga täiesti üksi, õpetaja peaks olema valmis teda kuidagi aitama. Kui õpetaja abistab liiga palju, siis ei jää õpilase osaks suurt midagi ning me ei saagi rääkida probleemõppest. Õpetaja peab end asetama õpilase situatsiooni, vaatama asjale õpilase pilguga, püüdma aru saada, kuidas õpilane mõtleb ja esitama küsimuse või osutama sammule, milleni *õpilane ka ise oleks võinud jõuda* (Pólya, 2001, lk 11).

Milline on see „õige“ abi? Uurimused on näidanud, et õpilaste probleemi lahendamise oskused sõltuvad suurel määral sellest, milliseid küsimusi õpetaja õpilastele esitab ning milliseid soovitusi ja millal jagab.
Õpetaja abistavad vihjed ja küsimused võib klassifitseerida järgmiselt (Lace, 2010):

- motiveeriv abi (ülesanne pole ju raske, sa saad hakkama…)
- tagasisideabi (oled õigel teel, pead selle koha veelkord üle vaatama, uuesti arvutama …)
- üldise strateegia abi (millist lahendusplaani kasutada, tagasivaade, kontroll …)
- sisustrateegiline abi (kas Pythagorase teoreemiga oleks mõtet proovida …)
- sisuline abi (need kaks kolmnurka on ju võrdsed, millised on täisarvud …).

Lätis läbi viidud G. Lace uuring näitas, et enamik õpetajate abistavatest vihjetest ja küsimustest olid viimasesse, sisulise abi rubriiki kuuluvad. Ta jõudis järeldusele, et lahendusstrateegia leidmist ja sellega kaasnevaid mõtteprotsesse ei tähtsusta õpetajad nii kõrgelt. Ka refleksioon ja tagasivaade ülesandele jäid küsimustest välja.
Suurt abi küsimuste esitamise osas pakub eespool viidatud Pólya raamat „*Kuidas seda lahendada*“. Sealt kooruvad välja nn korduvad küsimused, mida tuleks esitada paljude ülesannete korral, kuid ka mõtted, mis aitavad konkreetse ülesande juures sobivaid küsimusi moodustada.
Lisaks õpetaja abistavatele ja suunavatele küsimustele mõjutavad probleemi lahendamise oskuse arengut teisedki näitajad. Ühes Soome maakonnas uuriti õpilaste mõtlemise arengut ja arendamist VI klassis neljas matemaatika ja neljas loodusteaduste rühmas ühe õppeaasta vältel (Perkkilä, Ojala, 2009). Kokku osales uuringus 271õpilast. Igal nädalal viidi nendes klassides läbi kaks probleemülesannete lahendamise tundi rühmatöö vormis. Tunnis kasutati palju konkreetseid näitlikke vahendeid, õpilased pidid oma mõttekäike teistele selgitama, neid innustati uusi erinevaid lahendusmeetodeid otsima. Selle tulemusena paranesid tavaliste kontrolltööde tulemused, kuid eriti suurt arengut täheldati mõtlemise kvaliteedis (viimast kontrolliti ka järgnevatel aastatel). Järeldus antud uuringust oli järgmine: konkreetsusele tuginev sotsiaalne õppimine soodustab mõtlemise arengut väga tugevalt. Uuritutest osutusid 16-aastaselt ca 70% olevat formaalse mõtlemise faasis, kuid teiste uuringute tulemusena leiti üldkontingendis selliseid õpilasi vaid 30%. Seega mõjutavad saadud tulemuste põhjal õpilaste arengut kaks näitajat:

- ülesande lahendamisel toetumine konkreetsetele esemetele, joonistele, arvulistele näidetele jne;
- koos teistega probleemi lahenduse üle arutamine.

Viimast näitajat, metakognitsiooni, mis seisneb probleemi lahenduse üle arutlemises, peetaksegi probleemõppe kõige väärtuslikumaks osaks (Birykov, s.a.). Metakognitsiooni käigus vaatavad õpilased lahendusele tagasi, selgitavad oma lahenduskäiku teistele, toovad välja, millist strateegiat nad lahendamiseks kasutasid, milliseid raskusi ette tuli, kontrollivad veelkord lahenduse õigsust, uurivad, kas saaks ka teisiti lahendada jne.

2. **Probleemülesande lahendamise heuristilised strateegiad**

Eelnevast selgus, et väga oluline on suunata õpilasi ka probleemülesannete üldiste lahendusstrateegiate üle mõtlema. Ei maksa arvata, et need strateegiad kujunevad õpilasel iseenesest. Üks võimalus on tutvustada õpilastele erinevaid heuristilisi strateegiaid. Neid strateegiaid on palju, mõnede arvates sadu. Järgnevas tutvustatakse kümmet erinevat strateegiat, mis on sobivad nii matemaatiliste kui ka eluliste probleemide lahendamiseks. Aluseks on võetud A. S. Posamentieri ja S. Kruliku strateegiate liigitus (Posamentier, Krulik, 1998).

Kohe alguses olgu öeldud, et nende strateegiate õppimine ei tee veel heaks probleemilahendajaks, sest olulisim konkreetse ülesande juures on alati sobiva strateegia valimise oskus.
Vahel võib õpetajale tunduda, et heuristilisi strateegiaid tuleb õpetada nii nagu teisigi matemaatilisi tõdesid: kõigepealt tutvustab õpetaja ise ühte näidet, siis harjutatakse järgmist näidet koos õpilastega, siis harjutavad õpilased iseseisvalt ja asi ongi selge. Viljakam tee on arvatavasti see, et strateegia olemusega tutvutakse mingi probleemülesande lahendamise järel. Üheskoos vaadatakse lahenduse üldine idee veelkord üle, kusjuures õpetaja rõhutab antud strateegia olulisi tunnuseid. Strateegiale antakse nimetus ja proovitakse selle järgi lahendada veel mõnda ülesannet.

Strateegia I – arutlemine tagasisuunas

See strateegia on kasutusel ka igapäevaelus, kui tahame näiteks endale teha ühe päeva tegevusteks ajakava. Selleks tuleks kõigepealt koostada nimekiri töödest, mis peaksid teatud kellaajaks tehtud saama, ja määrata, kui palju iga töö aega võtab. Alustades lõpetamise ajast paneme kokku kõigi tegevuste ajad ja nii saame kätte tööde algusaja. Tagasisuunas arutleme näiteks ka siis, kui tahame teatud kellaajaks jõuda etteantud sihtpunkti ja peame selleks kasutama erinevaid transpordivahendeid.
Sellist tagurpidi arutluskäiku nimetatakse ka analüüsiks. Analüüs aitab paljude keerukamate ülesannete lahendustee või teoreemi tõestuse algust leida.

Näide 1. *On kasutada 11-liitrine nõu ja 5-liitrine nõu. Kuidas saab nende abil mõõta 7 liitrit vett?*
Tagasisuunas arutledes alustame lõpust: et saada 7 liitrit, oleks meil lõpuks vaja 11-liitrisest nõust valada ära 4 liitrit. Et mõõta 4 liitrit, peaks 5-liitrises nõus olema 1 liiter, sellele 4 liitri lisamisel saab nõu täis. Et saada 5-liitrisse 1 liiter, tuleks 11-liitrisest valada kaks korda 5 liitrit välja. Nii olemegi jõudnud lahenduseni.

1) Võtame 11-liitrise nõu vett täis ja valame sellest 5-liitrise nõu täis; selle kallame tühjaks ja valame veelkord 11-liitrisest 5-liitrise täis. Nüüd on 11-liitrises 1 liiter vett.
2) Valame selle vee 5-liitrisse nõusse.
3) Võtame 11-liitrise vett täis ja kallame sealt 5-liitrise täis (sinna mahub veel 4 liitrit). Nii jääbki nõusse 7 liitrit.

Näide 2. *Laane-taat sõidab linna õunu müüma. Selleks peab ta minema läbi 7 värava. Iga värava ees olev väravavaht nõuab taadilt endale pooled õuntest ja veel ühe õuna. Kui taat lõpuks linna jõudis, oli tal järel ainult üks õun. Mitu õuna oli tal kodust väljudes kaasas?*
Selle strateegia kohaselt alustame lahendamist lõpust.
Kuna linna jõudes oli taadil alles üks õun, pidi tal 7. värava ees olema $(1+1)\cdot 2 = 4$ õuna, millest ta andis ära pooled ja veel ühe õuna ehk 3 õuna.
Tal pidi 6. värava ees olema $(4+1)\cdot 2 = 10$ õuna, millest ta andis ära $5+1$ õuna.
Eelmise 5. värava ees pidi taadil olema $(10+1)\cdot 2 = 22$ õuna, 4. värava ees $(22+1)\cdot 2 = 46$ õuna, 3. värava ees $(46+1)\cdot 2 = 94$ õuna, 2. värava ees $(94+1)\cdot 2 = 190$ õuna ja 1. värava ees $(190+1)\cdot 2 = 382$ õuna.
Iseseisvaks lahendamiseks (kõigepealt tagasisuunas arutledes, siis ka võrrandite abil).

1. Jukul on kaks munakeetmise kella: üks 7-minutise taimeriga ja teine 11-minutise taimeriga. Kuidas saaks nende abil mõõta muna keetmiseks täpselt 15 minutit aega?
2. Evelin, Henri ja Allan mängivad järgmist mängu. Mängija, kes antud raundi kaotab, peab kummalegi ülejäänud mängijale andma niipalju raha, kui sellel mängijal hetkel

on. Esimese raundi kaotas Evelin ning ta andis Henrile ja Allanile niipalju raha, kui neil oli. Teise raundi kaotas Henri, kes andis samuti Evelinile ja Allanile niipalju raha, kui neil oli. Kolmanda raundi kaotas Allan ja andis samuti teistele reeglite kohaselt raha. Nüüd otsustati mäng lõpetada. Selgus, et kõigil oli mängu lõpuks võrdselt 24 eurot. Kui palju raha oli igaühel mängu algul?

3. Kahe arvu summa on 12 ja samade arvude korrutis on 4. Leida nende arvude pöördarvude summa.
4. Laske õpilastel mõõta, kui palju aega kulub neil hommikul erinevateks tegevusteks (pesemine, riietumine, söömine, koolitulek jm) kuni kooli jõudmiseni. Selle põhjal saavad nad ise koostada erinevaid ülesandeid tagasisuunas arutlemise harjutamiseks (Schackow, O´Connell, 2008, lk 102).

Strateegia II – seaduspärasuste, mustrite leidmine

Matemaatikas on tähtsal kohal loogilised seosed. Need seosed jäävad esmapilgul silma teatud „mustritena". Eriti hästi on mustrid tajutavad geomeetrias, kuid neid saab leida ka arvude ja algebra vallas. Näiteks telefoninumbrite või mingite salakoodide paremaks meeldejätmiseks otsib inimene sageli selliseid seoseid.

C. F. Gaussi eluloost võib lugeda, kuidas ta 9-aastase poisina leidis lihtsa mustri arvude 1 – 100 summa leidmiseks. Ta märkas, et $1+100=2+99=3+98=...=50+51=101$ ja seega otsitav summa on $50\cdot101=5050$.

Seaduspärasuste leidmine arvjadades on jõukohane juba I kooliastme õpilastele. Näiteks Fibonacci jadas 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, … on iga liige alates kolmandast võrdne kahe eelneva liikme summaga. Seda jada võib pinginaabritele ühiseks uurimiseks anda. Fibonacci jada avaldub looduses näiteks lille kroonlehtede arvus, lehtede paigutuses ühel taimel jne.

Jadas 1, 10, 2, 7, 3, 4, 4, … jääb aga silma kaks erinevat jada: paarituarvulistel kohtadel on arvud 1, 2, 3, 4 ja paarisarvulistel kohtadel 10, 7, 4. Selle seaduspärasuse järgi jätkates oleksid jada järgnevad liikmed 1 ja 5.

Kuid jada jätkamise ülesannete korral peab alati arvestama, et leitud seaduspärasus ei pruugi olla ainus. Seepärast tuleks alati lasta õpilasel selgitada leitud mustrit ka sõnaliselt.

Mustrite sihipärane otsimine ja leidmine võivad paljude ülesannete lahendust oluliselt lihtsustada.

Näide 1.

Leida 30 esimese positiivse paaritu arvu summa.

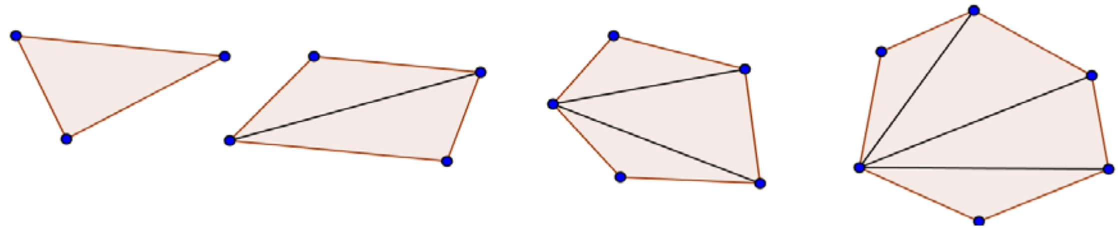
Uurime mustreid esimeste paaritute arvude korral.

Liidetavad	Liidetavate arv	Summa
1	1	1
1+3	2	4
1+3+5	3	9
1+3+5+7	4	16
1+3+5+7+9	5	25
1+3+5+7+9+11	6	36

Tabelist võib kohe püstitada hüpoteesi, et 30 paaritu arvu summa on $30^2=900$. Tõestada saab selle väite Gaussi tähelepanekule tuginedes või matemaatilise induktsiooniga.

Näide 2. *Leida kumera 20-nurga sisenurkade summa.*

Alustame kolmnurgast, mille sisenurkade summat me teame. Nelinurga saame jaotada diagonaaliga kaheks kolmnurgaks, viisnurga kolmeks kolmnurgaks jne.



Nii märkame, et hulknurga ühest tipust tõmmatud diagonaalide abil tekkinud kolmnurkade arv on 2 võrra väiksem hulknurga tippude arvust: viisnurgas tekib 3 kolmnurka, kuusnurgas 4 kolmnurka jne, kumeras 20-nurgas seega 18 kolmnurka. Järelikult on 20-nurga sisenurkade summa $18 \cdot 180° = 3240°$.

Näide 3. *Millega on võrdne saja murru summa* $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{100\cdot 101}$ *?*

Õpilastel on kõige lihtsam näha seaduspärasust, kui vaadata algul väiksemat arvu liidetavaid:

$$\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}=\frac{4}{5}$$

Nii tekib hüpotees, et otsitav summa on $\frac{100}{101}$. Selle tõesuse näitamiseks tasub mõelda, kuidas võiksid olla tekkinud murrud, mille nimetajas on kahe järjestikuse arvu korrutis ja lugejas arv 1. Ilmselt kahe murru lahutamisel: $\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$.

Iseseisvaks lahendamiseks

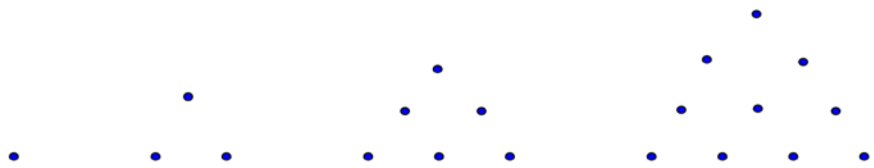
1. On antud arvude tabel

1					
3	5				
7	9	11			
13	15	17	19		
21	23	25	27	29	
31	33	35	37	39	41

……………………………………………………

Millega võrdub selle tabeli 25. reas olevate arvude summa?

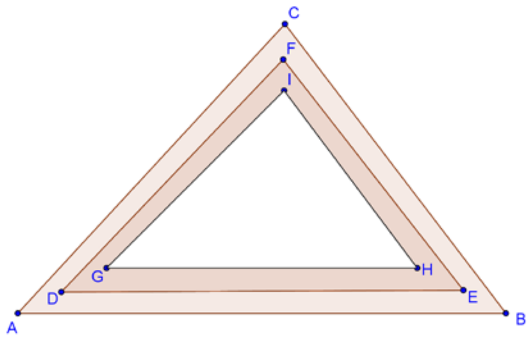
2. Uurida seaduspärasusi 101-ga korrutamisel. Selleks uurida juhtusid, kui korrutada 101-ga ühekohalist arvu, kahekohalist arvu, kolmekohalist arvu. Sõnastada reegel, mis võimaldaks ennustada korrutist, kui teine tegur on ühekohaline arv, kahekohaline arv, kolmekohaline arv.
3. Joonise neli kujundit on moodustatud punktidest teatud seaduspärasuse järgi. Mitu punkti on vaja viienda kujundi moodustamiseks, 10. kujundi moodustamiseks?



Strateegia III – teistsuguste vaatenurkade leidmine

Koolis õpetame ülesannet lahendama kõigepealt nn traditsioonilisel viisil. Kuid see tee ei pruugi iga ülesande jaoks olla kõige efektiivsem. Mõnikord on kasulik mõelda, kas ülesannet saaks lahendada teisiti, lihtsamalt. Analoogiline soovitus anti ka strateegia I juures. Teinekord on kasulik kõigepealt isegi ülesande küsimus ümber sõnastada ja leida mingi suurus, mille kaudu on hoopis lihtsam küsimusele vastata. Näiteks olgu meil vaja kiiresti saada teada, mitu inimest on seminarile tulnud. On võimatu kõigis ridades istujad kokku loendada. Hoopis lihtsam on loendada, mitu tühja kohta on saalis ja selle kaudu saada kätte osalejate arv.

Näide 1. *Leida kolmnurga ABC ja kolmnurga GHI vahele jääva pinnatüki pindala, kui joonisel kujutatud kolme kolmnurga vastavad küljed on paralleelsed ja asuvad üksteisest 1 cm kaugusel. Keskmise kolmnurga DEF küljed on pikkustega 7 cm, 5 cm ja 6 cm.*



Enamus asuks ilmselt kõigepealt leidma kolmnurga *ABC* ja kolmnurga *GHI* pindalasid ja seejärel nende vahet. Ülesannet võiks vaadata teisest vaatenurgast – joonisel on ka trapetseid, mille pindala on väga lihtne leida, sest nende kõrgused ja kesklõigud on ju teada.
Et $S_{AGIC} = 6 \cdot 2 = 12$, $S_{AGBH} = 7 \cdot 2 = 14$ ja $S_{BCIH} = 5 \cdot 2 = 10$, on otsitav pindala $12 + 14 + 10 = 36\ \text{cm}^2$.

Näide 2. *Nimetame naturaalarvu lõpus olevaid nulle arvu lõpunullideks. Näiteks arvus 405300 on kaks lõpunulli. Mitu lõpunulli on arvus* $N = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot 19 \cdot 20$, *kui korrutis on leitud?*
Üks võimalus lahendamiseks oleks taskuarvutil need arvud korrutada. Kuid enamik taskuarvuteid kuvab nii suure arvu ekraanile standardkujul ja lõpunullide arvu on keerukas välja lugeda.
Arutleme teisiti: lõpunull tekib arvu korrutamisel 10-ga. Seega on meil vaja leida, mitu tegurit 10 antud korrutises tekib. Ilmselt sõltub see algteguri 5 arvust, sest algtegurit 2 esineb kindlasti rohkem kui tegurit 5. Tegur 5 esineb ainult arvudes 5, 10, 15 ja 20. Järelikult lõpeb arv *N* nelja nulliga.

Näide 3. *Lahendada võrrand* $(x-3)^3 + (x-7)^3 = (2x-10)^3$.

Traditsiooniliselt tekib mõte avada sulud, koondada ja seejärel püüda avaldist tegurdada. Teine tee on uurida seoseid kolme suluavaldise vahel. Sel juhul võib märgata, et $(x-3)+(x-7)=2x-10$. Tähistades esimese suluavaldise tähega *a* ja teise suluavaldise tähega *b*, saame võrrandi esitada kujul $a^3+b^3=(a+b)^3$, millest kuupi tõstmise ja sarnaste liikmete koondamise järel saame võrrandi $3a^2b+3ab^2=0$ ehk $3ab(a+b)=0$. See korrutis võrdub nulliga kolmel juhul: kui $a=0,\ b=0$ või $a+b=0$. Siit saame kolm lahendit $x=3,\ x=7$ ja $x=5$.

Iseseisvaks lahendamiseks

1. Risttahuka kolme erineva suurusega tahu pindalad on 165, 176 ja 540 ühikut. Milline on risttahuka ruumala?
2. Tõestada, et täisnurkse kolmnurga hüpotenuusile joonestatud mediaan võrdub poolega hüpotenuusist.
3. Võrdhaarse kolmnurga *ABC* mediaanid *AR* ja *BP* on risti ning *OR* = 2 cm (punkt *O* on mediaanide lõikepunkt). Arvutada kolmnurga *ABC* pindala.

Strateegia IV – lihtsama analoogilise ülesande lahendamine

Eelnevast on selgeks saanud, et ühe ülesande lahendamiseks on peaaegu alati võimalik leida erinevaid teid, millede seast on mõistlik otsida lihtsaimat. Mõnikord jõuame lihtsaima lahenduseni nii, et lihtsustame kõigepealt ka oma ülesande kujule, mille lahendamine on jõukohasem. Näiteks kui oleme oma arvutisse laadinud uue tarkvarapaketi ja tahame seda tundma õppida, on mõistlik alustada lihtsamatest käskudest, mida mõnes paketis oleme juba kasutanud. Nendelt liigume edasi keerukamate või uute käskudeni.
Kui oleme ülesande lahendanud lihtsama juhu korral, võib edasi liikuda antud ülesande lahendamisele üldkujul ja sealt saadud tulemuse abil tulla tagasi esialgse ülesande lahendamisele.

Näide 1. *Kummist ujumisbassein maksab poes 39.90 €. Kampaania käigus alandati selle hinda 20%. Nädalavahetustel tehakse kliendikaardi omanikele kõigi kaupade allahindlust 10%. Juhanil on selle poe kliendikaart ja ta arvab, et nädalalõpul ostes saab ta basseini 30% odavamalt ehk 27.93 € eest. Kas tal on õigus?*
Tavapärase lahenduskäigu asemel tasub siin vaadelda lihtsamate arvudega ülesannet: võtame kauba hinnaks 100 € (mitte 39.90). Kampaania ajal maksaks see kaup 80 €, millest kliendikaardiga saaks soodustust 8 €, seega maksaks kaup kliendile nädalavahetusel 72 €. See on tavahinnast 28 € ehk 28% odavam. Sama hinnaalandus tuleks ka esialgses ülesandes.
Näide 2. *Arvu 360 kõigi positiivsete tegurite summa on 1170. Millega võrdub nende tegurite pöördarvude summa?*
Arvu 360 positiivsed tegurid on 1, 2, 3, …, 180, 360. Nende tegurite pöördarvud on $\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots,\ \frac{1}{180},\ \frac{1}{360}$. Nende murdude summa leidmine on aga küllalt vaevanõudev.
Vaatame lihtsamat ülesannet: uurime sama situatsiooni näiteks arvu 12 korral. Arvu 12 tegurid on 1, 2, 3, 4, 6 ja 12 ning nende tegurite summa on $1+2+3+4+6+12=28$. Leiame ka tegurite pöördarvude summa: $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{28}{12}$. Uurides selles summas olevate arvude seost esialgsete arvudega, võime püstitada hüpoteesi, et arvu 360 kõigi tegurite

pöördarvude summa on $\frac{1170}{360}$. Selle lihtsama juhu abil võime samuti näha, kuidas lugejasse tekib tõepoolest arvu kõigi tegurite summa.

Iseseisvaks lahendamiseks

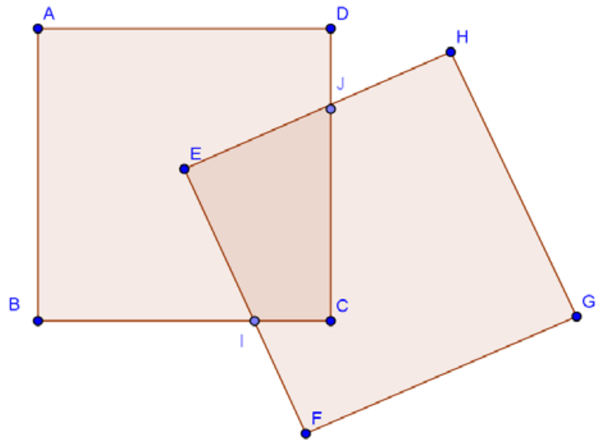
1. On antud neli arvu 12,314; 8,978; 53,903 ja 7,4569. Mitu protsenti moodustab nende arvude aritmeetiline keskmine arvude summast?
2. Millega võrdub $\frac{2+4+6+8+...+34+36+38}{3+6+9+12+...+51+54+57}$?
3. On antud 17 järjestikust täisarvu, mille summa on 102. Mis arv on selles jadas 9. kohal?

Strateegia V – piirjuhu uurimine

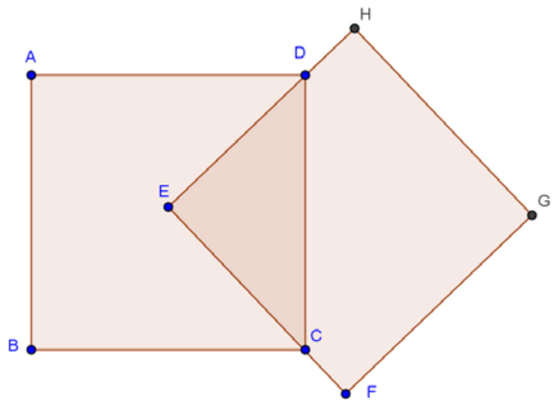
Nii matemaatikaülesande kui ka igapäevaelu ülesande korral on mõnikord kasulik vaadelda piirsituatsiooni. Näiteks võime lahenduse otsimisel mõelda, mis juhtuks halvimal juhul. Mõistagi ei tohi seejuures muuta ülesandes olevate muutujate olemust.

Näide 1. *Sahtlis on 8 pruuni sokki, 6 beeži sokki ja 12 musta sokki. Milline on vähim sokkide arv, mis tuleks pimesi sahtlist võtta, et nende seas oleks kindlasti 2 musta sokki?*
Selle ülesande lahendamisel vaatleme kõige halvemat juhtu: võetud sokkide seas on vaid üks must sokk. Halvimal juhul on siis võetud kõik 8 pruuni sokki, 6 beeži sokki ja vaid üks must sokk, kokku 15 sokki. Kui võtame aga 16 sokki, siis peab kindlasti nende seas olema 2 musta sokki.
Sellise arutelu järel oskame kiiresti anda ülesandele vastuse ka teistel tingimustel: et võetud sokkide seas oleks kindlasti 4 musta sokki, tuleb võtta $8+6+4=18$ sokki jne.

Näide 2. *Kaks ruutu küljepikkustega 8 asuvad nii, et ühe ruudu tipp asub teise ruudu keskpunktis. Leida nelinurga EICJ pindala.*



Traditsioonilise lahenduse korral joonestatakse kõigepealt lõigud *ED* ja *EC*, mille abil saadakse kolmnurkade *ECI* ja *EDJ* võrdsust arvestades otsitava nelinurga pindalaks üks neljandik ruudu pindalast ehk 16 pindalaühikut.
See vastus oleks lihtsasti saadav ka ühte piirjuhtu vaadates: nimelt kui teise ruudu küljed läbivad esimese ruudu tippe *C* ja *D*.



Iseseisvaks lahendamiseks

1. Leida seitsmekohalise arvu 12….6 puuduvad numbrid nii, et see arv võrduks kolme järjestikuse naturaalarvu korrutisega.
2. On olemas vaid üks neljakohaline arv, mis on täisruut ja koosneb kahest kõrvuti kirjutatud kahekohalisest täisruudust. Mis on see neljakohaline arv?
3. Kolm ühesugust eset maksavad 36 eurot sentidega, 8 samasugust eset maksavad 98 eurot sentidega. Kui palju maksab üks ese?

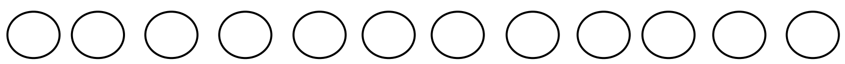
Strateegia VI – joonise tegemine

Geomeetriaülesande puhul on joonise tegemine üsna tavaline. Ka tekstülesannete korral soovitatakse alati joonis teha. Joonisel on suurustevaheliste seoste iseloom sageli palju paremini tajutav. Probleemi lahendamise 1. astmel (*Sa pead ülesandest aru saama*) on väga oluline, et õpilane annaks ülesande sisule oma peas võimalikult konkreetse vormi (Pólya, G. (2001, lk 15). Seetõttu rõhutatakse uues põhikooli matemaatika ainekavas andmete visualiseerimise vajadust kõigi teemade juures.

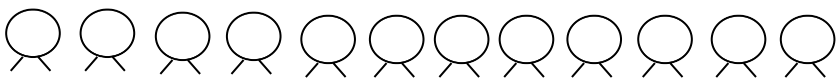
Näide 1. *Taimi vanaema kasvatab hanesid ja küülikuid. Neil on kokku 12 pead ja 30 jalga. Mitu hane ja mitu küülikut on Taimi vanaemal?*

Seda ülesannet on võimalik lahendada lihtsa lineaarvõrrandi(süsteemi) abil, kuid samuti joonisele tuginedes. Viimast saavad kasutada ka need õpilased, kes veel algebrat piisavalt ei tunne.

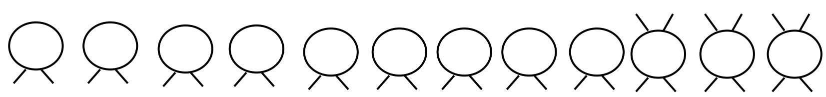
Kanname joonisele kõigepealt 12 pead.



Nüüd lisame igale peale kaks jalga, nagu on hanedel:



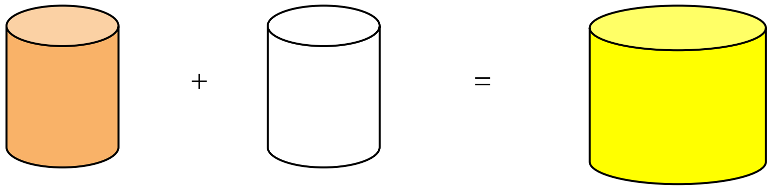
Oleme ära kasutanud 24 jalga, kasutamata on veel 6 jalga. Lisame ka need paarikaupa joonisele ja näeme, et hanesid on vanaemal 9 ja küülikuid 3.



Näide 2. *Talunikul on 9-liitrine nõu täis 50%-list taimekaitse lahust. Ta vajab taimede pritsimiseks 30%-list lahust. Kui palju vett peab ta esialgsele lahusele lisama, et saada vajalikku lahust?*

Ka siin aitab situatsiooni kirjeldada joonis.

Lahust on nõus: 9 liitrit $\quad x$ liitrit $\quad (9+x)$ liitrit



Selles on puhast
taimekaitsevahendit: 50% $\quad$ 0% $\quad$ 30%

4,5 liitrit $\quad 0x$ liitrit $\quad 0{,}30(9+x)$ liitrit

Siit saamegi võrrandi $0{,}30(9+x)=4{,}5+0x$, millest $x=6$. Seega tuleb esialgsele lahusele lisada 6 liitrit vett.

Iseseisvaks lahendamiseks

1. Maria koos emaga panevad magamistuppa tapeeti. Kui $\frac{2}{3}$ seinte pinnast oli tapetseeritud, tegid nad puhkepausi. Pärast pausi tapetseerisid nad $\frac{1}{2}$ ülejäänud pinnast. Kui suur osa jäi neil veel tapetseerida?
2. Mattiasel on käes neli kaarti: poti äss, risti äss, ruutu äss ja ärtu äss. Oskar tõmbab Mattiaselt kaks kaarti nii, et ta ei näe neid. Kui suur on tõenäosus, et ta tõmbab vähemalt ühe musta ässa?
3. Seinakell lööb kell 5.00 viis lööki ja selleks kulub 5 sekundit. Mitu sekundit kulub samal kellal 10 löögiks kell 10.00, kui löökide vahe on igal täistunnil ühesugune? Eeldame, et löök ise aega ei võta.

Strateegia VII – arukas oletamine ja testimine

See strateegia on lähedane nn katse-eksituse meetodile, mida kasutame vahel ka igapäevaelus. Seda strateegiat saab kasutada probleemülesannete lahendamisel sellistes keerulisemates situatsioonides, kus lahendi jaoks on palju võimalusi. Nende võimaluste hulgast valime kohe välja meie arvates sobivad ja kontrollime vaid neid, mitte ei lahenda ülesannet üldkujul. Seejuures tuleb näidata, et rohkem lahendeid ülesandel olla ei saa.

Näide 1. *Piret täitis 20 küsimusest koosnevat valikvastustega testi. Kui küsimuse vastus on õige, saab testile vastaja 5 punkti, vale vastuse eest saab* -2 *punkti ja vastamata küsimuse eest 0 punkti. Pireti testi tulemus oli 44 punkti, kusjuures ta jättis mõnedele küsimustele vastamata. Mitmele küsimusele jättis ta vastamata?*

Seda ülesannet võime lahendada kolme tundmatuga võrrandisüsteemi abil. Olgu õigete vastuste arv x, valede vastuste arv y ja vastamata küsimuste arv z. Siis saame koostada kahest võrrandist koosneva süsteemi:

$\begin{cases} x+y+z=20 \\ 5x-2y+0z=44 \end{cases}$, millest saame näiteks võrrandi $7x+2z=84$. Nüüd peaksime analüüsima, milliseid naturaalarvulisi lahendeid sellel võrrandil on. Selleks on mõistlik avaldada näiteks z ja uurida, millal $z=\dfrac{84-7x}{2}$ ja x on samaaegselt positiivsed täisarvud.
Sellise lahenduse asemel võiksime aga kasutada aruka oletamise strateegiat.
Kuna Piret sai 44 punkti, pidi tal õigeid vastuseid olema vähemalt 10. Kui tal oleks olnud 9 õiget vastust, siis saanuks ta nende eest 45 punkti ja sellest ei saa paarisarvu 2 lahutamisel tulemust 44. Kui õigeid vastuseid oli 10, sai Piret nende eest 50 punkti. Seega pidi ta vastama valesti 3 küsimust, mille eest sai -6 punkti ja kokku tulemuseks 44 punkti. Vastamata jättis ta sel juhul 7 küsimust. Nüüd peame küsima: kas see on ainus lahend? Vaatleme edasi juhtu, kui Piret vastas õigesti 11 küsimusele ja sai selle eest 55 punkti. Sel juhul ei ole aga võimalik tal saada tulemuseks 44 punkti ($55-44=11$ ei jagu 2-ga). Kui ta oleks vastanud õigesti 12 küsimusele, oleks valede vastuste eest tulnud maha võtta $60-44=16$ punkti. See tähendab, et ta oleks pidanud valesti vastama 8 küsimusele. Sel juhul aga ei saanud ta ühelegi küsimusele vastamata jätta. Siit järeldub, et õigete vastuste arv ei saa olla suurem kui 12. Seega ongi ainsaks võimaluseks, et Piret jättis vastamata 7 küsimusele.

Näide 2. *Kahe positiivse täisarvu vahe on 5 ja nendesamade arvude ruutjuurte summa on samuti 5. Mis arvud need on?*
Tähistades väiksema arvu muutujaga x, saame võrrandi $\sqrt{x}+\sqrt{x+5}=5$ ja selle lahendamisel näeme, et need arvud on 4 ja 9.
Kui aga õpilane ei oska veel juurvõrrandit lahendada, võib ta selle asemel arutleda järgmiselt. Kahe ruutjuure summa saab olla 5 kahel juhul: 1+4 või 2+3. Esimesel juhul on otsitavad arvud 1 ja 16, teisel juhul 4 ja 9. Kuna arvude vahe peab olema 5, sobib lahendiks vaid viimane arvupaar.

Iseseisvaks lahendamiseks

1. Hannese isa hobiks on mööbli valmistamine. Eelmisel aastal tegi ta sõpradele kingiks 4 jalaga söögilaudu ja 3 jalaga taburette. Kokku oli kõigil mööbliesemetel 37 jalga. Mitu taburetti Hannese isa valmistas?
2. Evely valmistas käsitööringis viis seebitükki. Neid kahekaupa kaalule asetades nägi ta, et kaalud olid järgmised:

   110 g, 112 g, 113 g, 114 g, 115 g, 116 g, 117 g, 118 g, 120 g, 121 g.

   Kui palju kaalub iga seebitükk?
3. Millised positiivsed täisarvud saavad olla võrrandi $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{5}=\dfrac{17}{20}$ lahenditeks?

Strateegia VIII – kõigi võimaluste läbivaatamine

See strateegia on oma olemuselt kõige lihtsam, sest ei peagi muud lahendust otsima, kui vaid kõiki võimalusi vaatlema ja nende hulgast sobivad välja valima. Antud strateegia põhiraskus seisneb selles, et me tõepoolest kõik võimalused oskaksime välja tuua.
Ka igapäevaelus kasutame seda strateegiat tihti. Näiteks soovib teie külaline teada, kuidas ta saab ühistranspordiga sõita hommikupoolikul Tartust Tallinnasse. Selleks tuleb teil välja kirjutada kõik busside, rongide ja lennuki väljumisajad ning nende seast saab külaline valida sobiva.

Näide 1. *Visatakse korraga kahte täringut. Kui suur on tõenäosus, et saadud silmade summa on suurem kui 8?*

Kõige lihtsam ongi siin vaadata läbi kõik silmade summa võimalused. Selleks on mõistlik teha järgmine tabel.

Silmade arv	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Tabelist näeme, et 36 võimaliku summa seas on 8-st suuremaid summasid 10, seega otsitav tõenäosus on $\frac{5}{18}$.

Näide 2. *Panna neljakohalises arvus 4*1* tärnide asemele numbrid nii, et arv jaguks 9-ga.*

Et arv jaguks 9-ga, peab tema ristsumma olema kas 9 või 18. Kirjutame välja võimalused mõlema ristsumma jaoks.
Ristsumma 9 korral peab tärnide asemel olevate arvude summa olema 4 (4+0, 3+1, 2+2) ning arvud saavad olla 4410, 4014, 4311, 4113 ja 4212.
Ristsumma 18 korral peab tärnide asemel olevate arvude summa olema 13 (9+4, 8+5, 7+6) ning arvud saavad olla 4914, 4419, 4815, 4518, 4716 ja 4617.
Rohkem võimalusi selliste neljakohaliste arvude jaoks ei ole.

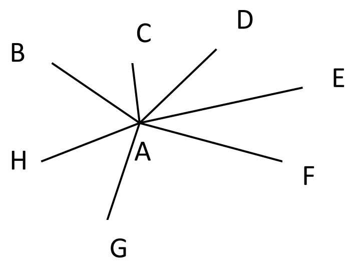
Iseseisvaks lahendamiseks

1. Leida vähim täisarv x, mille korral $\frac{12}{x+1}$ on täisarv.
2. Kahel naabril on ristkülikukujulised maasikaistandused ümbermõõduga 24 m, kusjuures ühe istanduse pindala on 8 m^2 suurem kui teisel. Milliste mõõtmetega need maasikaistandused on? Vaadelda ainult täisarvulisi mõõtmeid.
3. Mängutäringud valmistatakse nii, et vastastahkudel olevate silmade summa on 7. Millised saavad olla täringu ühest tipust lähtuva kolme tahu silmade summad?

Strateegia IX – andmete korrastamine

Iga (probleem)ülesande lahendamisel on oluline, et kõigepealt tehakse endale selgeks, mis on antud ja kuidas antud suurused omavahel seotud on. Seetõttu on alati kasulik andmed kõigepealt korrastada. Selleks võib teha tabeli või joonise, grupeerida andmeid mingi tunnuse järgi jne.

Näide 1. *Tasandil on 8 punkti nii, et ükski kolm neist ei asu ühel sirgel. Mitu lõiku on nende punktidega määratud?*
Andmete paremaks tajumiseks teeme joonise. Ühendame punkti A kõigi ülejäänud punktidega. Nii tekib 7 lõiku *AB*, *AC*, *AD*, *AE*, *AF*, *AG* ja *AH*.



Edasi vaatleme, mitu erinevat lõiku saab ülejäänud punktidesse tõmmata punktist *B*. Näeme, et ka neid lõike on 7. Kuid kuna lõik *AB* on juba olemas, on punktist *B* lähtuvate uute lõikude arv 6 (*BC*, *BD*, *BE*, *BF*, *BG* ja *BH*). Analoogiliselt jätkates leiame, et punktist *C* lähtub 5 uut lõiku, punktist *D* neli uut lõiku jne. Seega on 8 punktiga määratud $7+6+5+4+3+2+1=28$ erinevat lõiku.

Näide 2. *Millega võrdub korrutis* $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\left(1-\frac{1}{25}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{225}\right)$?

Vastuse saamiseks võib leida kõik 14 vahet ja need omavahel korrutada.

Mõistlikum on uurida seaduspärasusi ja selle alusel andmeid kõigepealt korrastada:

$$\left(1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)\left(1^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)\left(1^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2\right)\left(1^2-\left(\frac{1}{5}\right)^2\right)\cdot\ldots\cdot\left(1^2-\left(\frac{1}{15}\right)^2\right)=$$

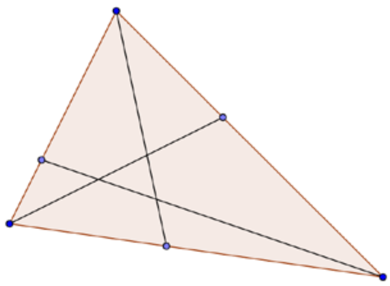
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{15}\right)\left(1+\frac{1}{15}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{14}{15}\cdot\frac{16}{15}.$$

Siit saame kergesti vastuseks $\frac{1}{2}\cdot\frac{16}{15}=\frac{8}{15}$.

Iseseisvaks lahendamiseks

1. Kahe naturaalarvu summa on 41. Milline on selliste arvude suurim võimalik korrutis?
2. Mitu erinevat kolmnurka on joonisel?



3. Ruutvõrrandi $x^2+bx+c=0$ kordajad *b* ja *c* määratakse täringu kahe viskega: esimese viske tulemus määrab *b* ja teise viske tulemus *c*. Kui suur on tõenäosus, et nii saadud ruutvõrrandil on reaalarvulised lahendid?

Strateegia X – loogiline põhjendamine

Matemaatikaõpetuses me taotleme, et õpilased õpiksid loogiliselt arutlema ja oskaksid seda teha ka väljaspool matemaatikat. Eeldame, et esitatud väidet osataks teatud faktidele tuginedes põhjendada, etteantud andmetest õigeid järeldusi teha jne.
Mõned matemaatikaülesanded on sageli sellised, kus lahendus tekibki loogilise arutelu käigus. Sel juhul arutleme tavaliselt nii: kuna teada on see ja ka see, saame järeldada, et … .

Näide 1. *Mesinik Paul müüs kolme päevaga 51 purki mett. Iga päev müüs ta kaks purki rohkem kui eelmisel päeval. Mitu purki mett müüs ta iga päev?*

Tavaliselt asutakse seda ülesannet lahendama võrrandi abil. Oletame, et Paul müüs esimesel päeval x purki mett, siis teisel päeval müüs ta $x+2$ purki ja kolmandal päeval $x+4$ purki, seega saame võrrandi $x+x+2+x+4=51$, millest $x=15$.
Selle asemel võime loogiliselt arutleda: kui Paul müüs kolme päevaga 51 purki mett, siis müüs ta keskmiselt 17 purki päevas. Kuna eri päevadel müüdud koguste vahed on ühesugused, siis on 17 just keskmisel päeval müüdud kogus. Järelikult müüs ta esimesel päeval 15 purki ja kolmandal päeval 19 purki mett.

Näide 2 . *Millega võrdub* $\frac{1}{x+6}$, *kui* $\frac{1}{x+5}=4$ *?*
Traditsioonilise lahenduse korral avaldatakse viimasest võrrandist x ning asendatakse saadud väärtus murru $\frac{1}{x+6}$ nimetajasse.
Loogiliselt võiksime arutleda nii: kui $\frac{1}{x+5}=4$, siis $x+5=\frac{1}{4}$. Et saada meile vajalikku suurust $x+6$, liidame võrduse mõlemale poolele 1 ning saame $x+6=1\frac{1}{4}$ ehk $x+6=\frac{5}{4}$. Järelikult $\frac{1}{x+6}=\frac{4}{5}$.

Iseseisvaks lahendamiseks

1. Liisa ostis jäätisetorbiku, millesse pandi üksteise peale nelja erinevat jäätist: šokolaadi-, vanilje-, banaani- ja mustikajäätist. Kõige viimasena saab ta süüa šokolaadijäätist. Vaniljejäätis ei asu šokolaadijäätise ega banaanijäätisega kõrvuti. Millises järjekorras asuvad jäätised torbikus?
2. Lahendada võrrand $4-\frac{3}{x}=\sqrt{4-\frac{3}{x}}$.
3. Kui antud naturaalarvu jagada 15-ga, tekib jääk 7. Leida summa, mis saadakse antud arvu 3-ga jagamisel ja 5-ga jagamisel tekkivate jääkide liitmisel.

Vaadeldud strateegiaid kõrvutades märkas lugeja kindlasti, et see liigitus on tinglik. Ühe ülesande lahendamisel tuleb sageli kasutada mitut strateegiat koos. Näiteks strateegia VIII (kõigi võimaluste läbivaatamine) juures kasutasime näites 1 ka strateegiat IX (andmete korrastamine tabelina). Ühe ja sama ülesande lahendamiseks saab sageli kasutada erinevaid strateegiaid. Põhiline kasu nende strateegiate liigitusest peaks olema õpilasele see, et ta oskaks paremini oma strateegiat kirjeldada (ja nimetada), samuti ülesande lahenduskäigule üldisemas plaanis tagasi vaadata. Õpetaja abistavad küsimused üldiste strateegiate osas (*Miks oli diagrammi või joonise tegemine selle ülesande lahendamisel kasulik? Kuidas saaksid kõige selgemalt välja tuua kõik lahendusvõimalused? Milliste ülesannete korral oleks sellise tabeli tegemine veel kasulik?*) aitavad erinevate strateegiate olemusest aru saada ja suunavad mingil määral ka strateegia valikuid tulevikus. Strateegia valiku oskus areneb ka ühe ülesande erinevaid lahendusstrateegiaid kõrvutades.

Kirjandus

1. Birykov, P. *Metacognitive aspects of solving combinatorics problems*. Külastatud 13.06.2011 aadressil http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/biryukov.pdf
2. Hadamard, J. *Psychology of invention in mathematical field*. Külastatud 24.08.2011 aadressil http://booklists.narod.ru/M_Mathematics/MPop_Popular_level/Hadamard_J._Psychology_of_invention_in_mathematical_field__Dover__1965__600dpi__T__153s_.1.htm
3. Lace, G. (2010). Lehrerfragen im Unterricht von Problemlösen. *Beiträge zum Mathematikunterricht. Vorträge auf der 44. Tagung für Didaktik der Mathematikunterricht in München.* Münster: WTM Verlag, 529–532.
4. Perkkilä, P., Ojala, P. (2009). Matematiikkaongelma vai ongelmamatematiikka – avaako ongelmapohjainen oppiminen matematiikan ongelmia. *Dimensio, 1,* 57–60.
5. Pólya, G. (2001). *Kuidas seda lahendada.* Tallinn: Valgus.
6. Posamentier, A. S., Krulik, S. (1998). *Problem-solving strategies for efficient and elegant solutions. A resource for the mathematics teacher.* California: Corwin Press Inc.
7. Schackow, J. B., O´Connell, S. (2008). *Introduction to problem solving: grades 6–8.* Portsmouth: Heinemann.