Funktsioonide õpetamisest põhikooli matemaatikakursuses

Allar Veelmaa, Loo Keskkool

Funktsioon on üldtähenduses eesmärgipärane omadus, ülesanne, otstarve. Mõiste „*funktsioon*“ ei ole kasutusel ainult matemaatikas, vaid ka loodusteadustes (nt organismi funktsioonid), muusikas (funktsioon on muusikas harmoonia mõiste, millega iseloomustatakse helirea astmete vahelisi suhteid. Funktsioone sisaldavat harmooniat nimetatakse funktsionaalharmooniaks), psühholoogias, arvutiteaduses (täpsemalt programmeerimises), filosoofias jms.

1. Funktsiooni mõiste avamine 7. klassi matemaatikakursuses

Funktsiooni mõiste juurde jõudmiseks on otstarbekas eelnevalt käsitleda järgmisi teemasid:

a) jäävad ja muutuvad suurused;
b) võrdelised suurused ja nende omadused;
c) pöördvõrdelised suurused;
d) graafikute lugemine.

1.1. Jäävad ja muutuvad suurused

Kui suuruse arvuline väärtus antud ülesande või nähtuse tingimustes ei muutu, siis nimetatakse seda suurust **jäävaks suuruseks**. Kui arvuline väärtus muutub, siis on tegemist **muutuva suurusega** ehk **muutujaga**.

Selle teema juures on kõigepealt otstarbekas uurida elulisi näiteid, mille puhul õpilased saavad selgesti aru, missugune suurus on antud protsessis muutuv, missugune jääv. Näiteks telefonikõne maksumuse arvutamisel on minutihind konstantne, kõne pikkus aga muutuv suurus (võib uurida ka näiteid, kus kõneminuti hind on x esimest minutit ühe hinnaga ja järgmised kõneminutid mingi muu hinnaga). Kui võtta vaatluse alla päevade arv ühes kuus, siis teatakse, et jaanuaris on 31 päeva (see on konstant), kuid veebruarikuu päevade arv võib olla 28 või 29. Siin on hea võimalus selgitada, missugused aastad on liigaastad (kui aastaarv jagub täpselt neljaga, kuid on mõned erandid, mida võivad lapsed ise uurida). Igapäevaelust võetud „konstantide” väärtused võivad ka muutuda. Näiteks ühe kilovatt-tunni elektrienergia eest tuleb maksta x eurosenti, pärast hinnatõusu on uus hind y eurosenti.

Matemaatikatunnist tuttavatest valemitest võib vaatluse alla võtta ringjoone pikkuse ja ringi pindala valemid, mis sisaldavad konstanti π. Ringjoone pikkuse valemis $c = 2\pi r$ ja pindala valemis $S = \pi r^2$ esineb üks konstant ja üks muutuv suurus.

1.2. Võrdelised suurused ja nende omadused

Kui kaks positiivset suurust sõltuvad teineteisest nii, et ühe suuruse suurenemisel (või vähenemisel) mingi arv korda suureneb (või väheneb) ka teine suurus sama arv korda, siis need suurused on võrdelised.

Näited võrdeliste suuruste kohta tuleb valida elulised, kus matemaatikat saab lõimida igapäevaeluga (Tõnso 2002: 172 – 173).

Näide: tabelis on antud auto poolt läbitud tee pikkus ja sõiduks kulunud aeg. Tuleb otsustada, kas meil on tegemist ühtlase liikumisega (füüsikas käsitletakse seda 8. klassis).

s (km)	45	60	90	120	150
t (h)	0,5	$\frac{2}{3}$	1,0	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$

Tabelis olevate andmete põhjal saame kindlad olla vaid selles, et 45 km läbimiseks kulutati pool tundi, 60 km läbimiseks 40 minutit jne. Nende andmete põhjal **ei saa** mitte kuidagi järeldada, et 22,5 km läbimiseks kulutati 15 minutit, 75 km läbimiseks 50 minutit jne. Ühtlase liikumisega on tegemist üksnes juhul, kui *mistahes võrdsetes ajavahemikes läbitakse võrdsed teepikkused*. Eelmise tabeli alusel ei saa öelda, kas liikumine on ühtlane või mitte.

Kui selle tabeli puhul jätta kõrvale füüsikaline sisu (tabeli esimeses veerus on sel juhul muutujad x ja y), siis saab öelda, et tegemist on võrdeliste suurustega.

Kui tegemist ei ole fikseeritud suurustega (näiteks tee pikkus, aeg; ostetud bensiini kogus, makstud rahasumma vms), siis tähistame üldjuhul sõltumatu muutuja tähega x ja sõltuva muutuja tähega y. Sel juhul võime öelda järgmiselt:

kahe suuruse x ja y vaheline sõltuvus on võrdeline sõltuvus, kui nende suuruste vastavate väärtuste jagatis on jääv (konstantne), st $\frac{y}{x} = a$. Arvu a (kus $a \neq 0$) nimetatakse võrdeteguriks.

1.3. Pöördvõrdelised suurused

Kahe suuruse x ja y vaheline sõltuvus on pöördvõrdeline sõltuvus siis, kui nende suuruste vastavate väärtuste korrutis on jääv (konstantne), st $xy = a$.

Pöördvõrdeliste suuruste ja pöördvõrdelise sõltuvuse juurde on mõistlik jõuda eluliste näidete abil. Näited peavad olema lihtsad ning kõigile arusaadavad.

Näited. Selgitame, kas suurused on pöördvõrdelised:

a) 180 km läbimise aeg ja sõidukiirus;
b) 10 euro eest ostetud kartulite kogus ja 1 kg kartulite hind;
c) tööviljakus ja töö tegemiseks kulunud aeg.

Esimese kahe näite puhul on suuruste pöördvõrdelisus mõistetav, kuid kolmanda näite puhul on õpilastele vaja selgitada, mida mõeldakse tööviljakuse all ja kus sellist mõistet kasutatakse ning alles siis saab otsustada, kas tööviljakus ja töö tegemiseks kulunud aeg on pöördvõrdelised suurused või mitte.

Tabelina antud suuruste puhul on esialgu mõistlik valida arvud nii, et ülesande matemaatilise sisu väljatoomise asemel ei muutuks ülesanne tülikaks arvutamiseks.

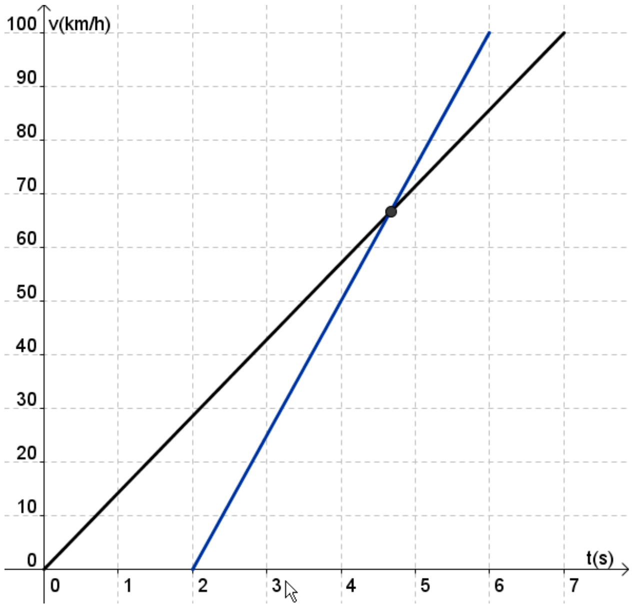
1.4. Graafikute lugemine

Graafikute lugemist käsitletakse esmakordselt 6. klassi matemaatikakursuses. Hiljem läheb seda oskust vaja mitmetes teistes õppeainetes (füüsika, keemia, geograafia, inimeseõpetus jm). Seega on mõistlik kasutada graafikuid, mis on seotud reaalse eluga, nii et matemaatikast oleks õpilasel ka muude õppeainete õppimisel kasu.

Graafikute lugemisel tuleb õpilase tähelepanu pöörata järgmistele aspektidele:

a) millised suurused on mingile teljele märgitud;
b) milliste mõõtühikutega on tegemist (sellest sõltub ka vastus);
c) kui suur on ühe jaotise väärtus kummalgi teljel?

Harjutamiseks sobivaid jooniseid saab teha näiteks *GeoGebraga* või *Wirisega* (neid programme saavad kasutada ka õpilased kodutööde tegemisel). Joonisel 1 on kaks liikumise graafikut (koostatud *GeoGebra* abil). Horisontaalteljel on keha liikumise aeg sekundites ja vertikaalteljel kiirus kilomeetrites tunni kohta. Joonisele võib vajadusel lisada teksti või pilte. Eeldades, et tegemist on ühtlase liikumisega, saab leida mõlema keha liikumiskiiruse. Joonte lõikepunktis on kehade kiirused võrdsed, õpilastelt võib küsida, kui palju aega kulus selle kiiruse saavutamiseks kummalgi kehal.



Joonis 1

1.5. Funktsiooni defineerimine

Funktsiooni mõiste määratlus peab olema antud nii, et 7. klassi õpilase jaoks on see mõistetavas keeles. Võrdleme kahte funktsiooni definitsiooni:

Eeskiri, mis seab ühe arvuhulga (*määramispiirkonna*) *X* igale elemendile *x* vastavusse teise arvuhulga (*muutumispiirkonna*) *Y* kindla elemendi *y*, s.t. määrab hulga *X* kujutuse hulka *Y*. Kui selline eeskiri esitatakse võrduse $y = f(x)$ abil, siis öeldakse, et tegemist on funktsiooniga *f*, kusjuures $f(a)$ tähendab selle funktsiooni väärtust kohal $x = a$ (Abel, E jt 1998: 42).

Eeskirja, mis seab sõltumatu muutuja igale väärtusele vastavusse sõltuva muutuja mingi ühe kindla väärtuse, nimetatakse funktsiooniks. Sõltumatut muutujat nimetatakse edaspidi ka **funktsiooni argumendiks,** argumendi väärtuse järgi leitud sõltuva muutuja vastavaid väärtusi nimetatakse aga **funktsiooni väärtusteks** (Tõnso 2002: 201).

Võrreldes neid definitsioone, on lihtne märgata, et mõlemad on samaväärsed, kuid esimeses on kasutusel mõisted, mida on 7. klassi õpilasele keeruline selgitada (nt *hulk* ja *kujutis*). Mõlemad definitsioonid rõhutavad ühte olulist aspekti: *igale argumendi väärtusele vastab parajasti üks funktsiooni väärtus.*

Siinkohal on õpilastele mõistlik selgitada, mil viisil saab funktsioone esitada ja kas alati kasutame tähist f või on ka teised tähistused lubatud. Funktsioone saab esitada:

a) valemina (näiteks $s = 60t$);
b) tabelina (vt näide 1);
c) graafiku abil (vt näide 2);
d) diagrammina;
e) sõnaliselt.

7. klassis kasutame kolme esimest esitusviisi, hiljem (11. klassis) võib kasutada ka ülejäänud võimalusi.

Näide 1. Selgitame, kas tabelis olevad andmed esitavad funktsiooni.

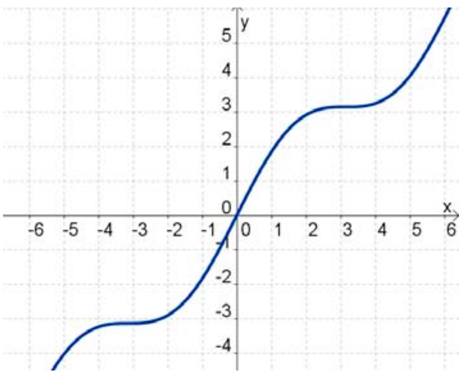
x	1	2	3	4
y	5	6	7	8

x	1	2	3	3
y	2	4	7	8

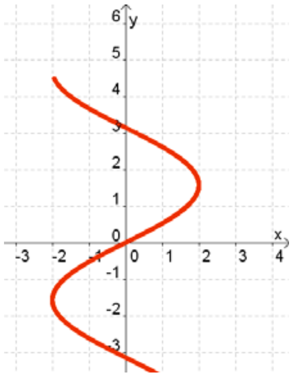
x	–3	–2	0	1	2	3	4
y	4	4	4	4	4	4	4

Esimeses tabelis vastab igale x väärtusele ainult üks y väärtus, seega on tegemist funktsiooniga. Teises tabelis vastab väärtusele $x = 3$ kaks erinevat y väärtust (7 ja 8), tabel ei esita funktsiooni. Kolmandas tabelis vastab igale x väärtusele ainult üks y väärtus (see, et need väärtused on võrdsed, ei ole üldse oluline), järelikult on tegemist funktsiooniga.

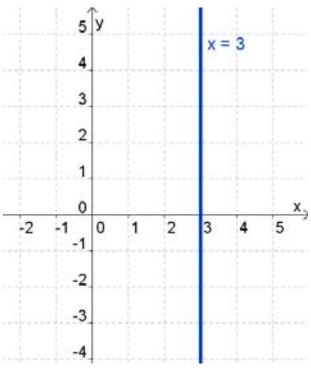
Näide 2. Selgitame, kas koordinaatteljestikus on funktsiooni graafik.



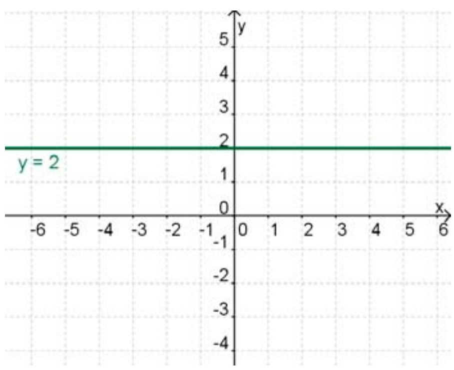
Joonis 2



Joonis 3



Joonis 4



Joonis 5

Jooniselt 2 on näha, et igale x väärtusele vastab täpselt üks y väärtus – tegemist on funktsiooniga. Joonisel 3 vastab vahemikus $-2 < x < 2$ ühele x väärtusele mitu erinevat y väärtust, seega see graafik funktsiooni ei esita. Joonisel 4 on sirge $x = 2$, sellele x väärtusele vastab lõpmata palju y väärtusi (kõikide sirgel asuvate punktide ordinaadid). Joonisel 5 on esitatud funktsioon (valemina $y = 2$), sest igale x väärtusele vastab ainult üks y väärtus.

2. Võrdeline sõltuvus

Võrdeliste suuruste (vt punkt 1.2.) vahelist sõltuvust nimetatakse **võrdeliseks sõltuvuseks**. Võrdelise sõltuvuse valem on $y = ax$, kus $a \neq 0$.

Valemina antud võrdelisi sõltuvusi käsitledes on otstarbekas valemi $y = ax$ asemel kasutada ka teistsuguseid tähistusi. 8. klassi füüsikakursuses kasutatakse ühtlase liikumise tee pikkuse arvutamisel valemit $s = vt$ (ühe suurustest v või t loeme konstandiks) ning keha massi sõltuvus tihedusest ρ ja ruumalast V esitatakse valemiga $m = \rho V$. Kindlasti tasub õpilastele näidata, et mitmed varemõpitud sõltuvused on (või ei ole) võrdelised sõltuvused.

Näited.

a) $s = 65v$ – ühtlase liikumise korral sõltub tee pikkus s võrdeliselt kiirusest v;
b) $P = 4a$ – ruudu ümbermõõt P sõltub võrdeliselt külje pikkusest a;
c) $S = a^2$ – ruudu pindala S ei ole võrdelises sõltuvuses ruudu külje pikkusega a;
d) $\alpha = \dfrac{180^\circ - \beta}{2}$ – võrdhaarse kolmnurga alusnurk α ei ole võrdelises sõltuvuses tipunurgaga β;
e) $S_n = (n - 2)\cdot 180^\circ$ – hulknurga sisenurkade summa ei ole võrdelises sõltuvuses nurkade arvuga n.

2.1. Võrdelise sõltuvuse $y = ax$ graafiku joonestamine

Alustada tuleb lihtsate näidetega, kus argumendi väärtustele vastavad täisarvulised funktsiooni väärtused. Esimestes ülesannetes on soovitatav kasutada 5 – 6 erinevat argumendi väärtust (õpilased peaksid ise märkama, et sirge joonistamiseks ei ole vaja leida nii palju punkte – piisab vaid kahest, millest üks on alati punkt (0;0)).
Probleemid võivad tekkida juhul, kui arv a on arvutamiseks ebamugav (näiteks harilik murd, mida ei saa täpselt kümnendmurruks teisendada). Sel juhul tasub x väärtused valida nii, et arvu a korrutamisel x väärtusega saame tulemuseks täisarvu.

Näide. Joonestame funktsioonide $y = \frac{2}{3}x$ ja $y = -\frac{5}{6}x$ graafikud.

x	0	3
y	0	2

x	0	6
y	0	–5

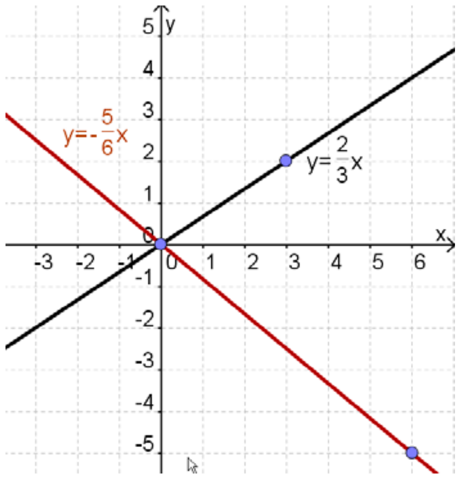
Mitmed õpetajad soovitavad tabeli horisontaalpaigutuse asemel kasutada vertikaalpaigutust, sest sel juhul on tabelis olevad arvud samas järjekorras nagu punkti koordinaadid tasandil.

x	y
0	0
3	2

Punkt (0; 0)
Punkt (3; 2)

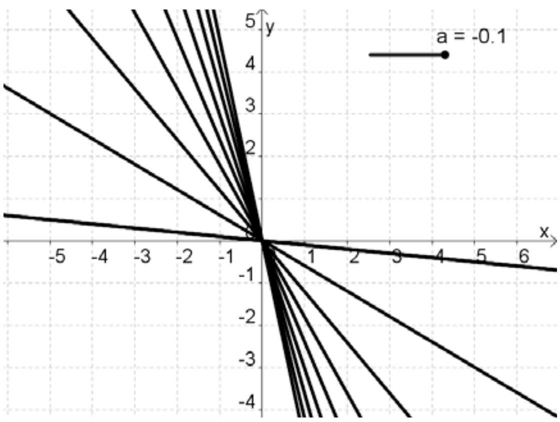
x	y
0	0
6	–5

Punkt (0; 0)
Punkt (6; –5)

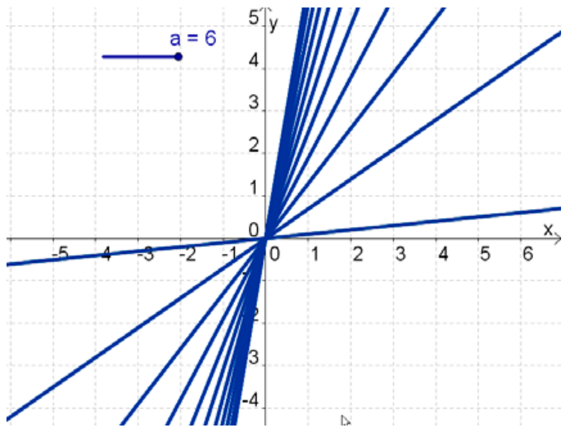


Joonis 6

Pärast seda, kui lapsed on ise mõned graafikud joonestanud, märkavad nad reeglipärasust: **võrdelise sõltuvuse graafik läbib alati punkti (0;0)**. Enamasti pannakse ka tähele, et kui **võrdetegur *a* on positiivne arv, siis paikneb sirge I ja III koordinaatveerandis; kui võrdetegur *a* on negatiivne arv, siis paikneb sirge II ja IV koordinaatveerandis**.
Seda on võimalik programmi *GeoGebra* abil kuvada ka ekraanile või interaktiivsele tahvlile. Muutes liuguri abil arvu *a* väärtust näeme, kuidas sirge asend koordinaatteljestikus muutub (vt joonis 7 ja joonis 8).

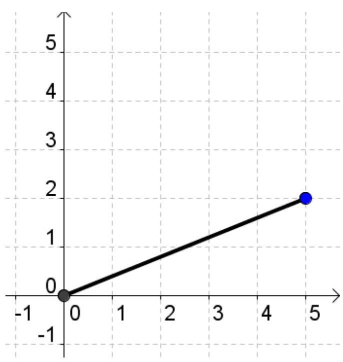


Joonis 7



Joonis 8

Graafiku joonestamisel tuleb õpilase tähelepanu pöörata järgmisele:
1) koordinaatteljestiku tegemisel võtta ühe ühiku pikkuseks 1 cm ehk kaks vihikuruutu (kui õpetaja pole eelnevalt midagi muud öelnud);
2) sirge paikneb kogu koordinaattasandi ulatuses. Kui õpilane ühendab teljestikku märgitud punktid omavahel, siis sel juhul on joonisel lõik, mitte sirge.
Joonisel 9 on näide ühest tüüpilisest „vildakast“ joonisest. Lisaks sirge asemel joonestatud lõigule on siin joonise autor jätnud ka teljed tähistamata.



Joonis 9

3. Lineaarfunktsioon ja selle graafik

Funktsiooni, mida saab esitada kujul $y = ax + b$, kus a ja b on konstandid, nimetatakse lineaarfunktsiooniks.

Lineaarfunktsiooni puhul on kindlasti vaja õpilastele selgitada arvude a ja b tähendust. Võttes valemis $y = ax + b$ argumendi x väärtuseks arvu 0, saame tulemuseks

$y = a \cdot 0 + b = b$,

arv b on funktsiooni algväärtus (ehk vabaliige), st väärtus, mis vastab argumendi väärtu–sele 0.

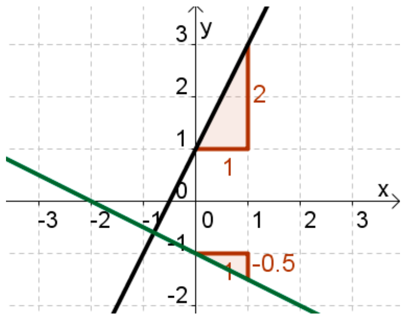
Geomeetriliselt tähendab see punkti, kus sirge läbib ordinaattelge: (0; b).

Keerulisem on selgitada arvu a tähendust ning sageli jäetakse see üldse tegemata. Vaatleme ühte näidet:

kuidas muutub funktsiooni $y = 2x + 3$ *väärtus, kui* x *väärtust ühe võrra suurendada*:
esialgne funktsiooni väärtus on $y = 2x + 3$,
uus väärtus on $2(x + 1) + 3 = 2x + 3 + 2$.

Näeme, et funktsiooni väärtus suurenes 2 võrra ehk **arvu *a* võrra**. Kui nüüd tuua veel üks näide, kus $a < 0$, siis saab selgeks, et **arv *a* näitab, mitme võrra muutub funktsiooni väärtus, kui argumendi väärtust suurendada ühe võrra**.

Arvu a nimetatakse ka sirge **tõusuks** (ei pea tingimata 10. klassini ootama). Sirge tõusu näitamiseks on hea vahend programm *GeoGebra*.



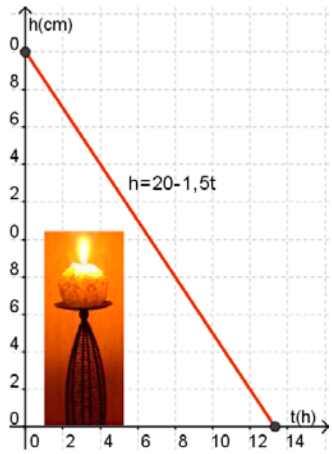
Joonis 10

Reaalse sisuga ülesannete lahendamisel ei ole vajalik kogu graafik, vaid ainult mingi osa sellest.

Näide. Küünla pikkus on 20 cm ja see põleb kiirusega 1,5 cm tunnis. Kujutame graafiliselt küünla pikkuse sõltuvust ajast.

Valemina saab küünla pikkuse kirjutada kujul $h = 20 - 1{,}5t$. Joonestame selle sirge, arvestades asjaolu, et graafikul pole mõtet juhul, kui $t < 0$ või $t > 13\frac{1}{3}$.

Programmis *GeoGebra* kasutame graafiku joonestamiseks korraldust **Funktsioon[20-1.5x,0,40/3]**, tulemus on joonisel 11.
Õpilase tähelepanu tasub pöörata siin sellele, et joonise tegemiseks ei kasutanud me kogu koordinaatteljestikku, vaid ainult selle esimest veerandit.



Joonis 11

Joonise tegemisel (eriti arvuti abil) tuleb hoolikalt jälgida, et me ei saaks absurdseid tulemusi. Sõltuvuses $F=\frac{9}{5}C+32$ (seos Celsiuse ja Fahrenheiti skaalade vahel) võime muutujale C anda mis tahes väärtusi, kuid mitte väiksemaid kui –273,15º, sest sellised temperatuurid ei ole teoreetiliselt ega praktiliselt võimalikud.

4. Pöördvõrdeline sõltuvus ja selle graafik

Suurusi, mille vastavate väärtuste korrutis on jääv, nimetatakse pöördvõrdelisteks suurusteks.

Pöördvõrdeliste suuruste vahelist sõltuvust nimetatakse pöördvõrdeliseks sõltuvuseks. Selle sõltuvusega määratud funktsiooni võib esitada valemiga $y=\frac{a}{x}$, kus $a \neq 0$.

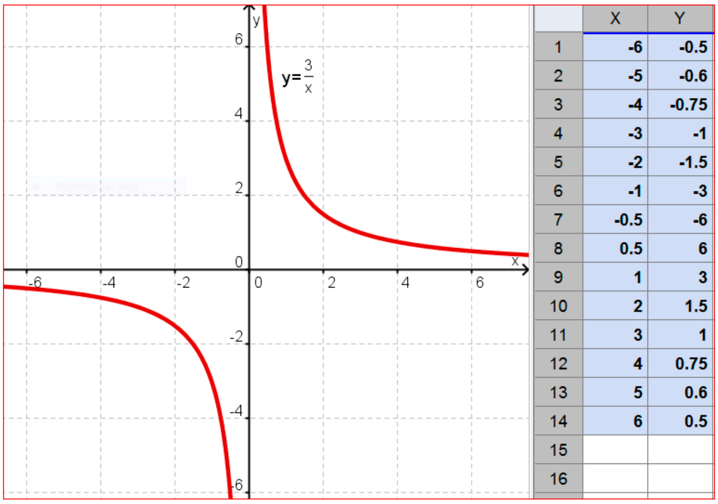
Pöördvõrdelise sõltuvuse graafikuks on (võrdhaarne) hüperbool.

Näide. Joonestame funktsiooni $y = 3 : x$ graafiku.
Valime x väärtused nii, et vähim ja suurim väärtus oleks arvu a kahekordne, seega $-6 \leq x \leq 6$. Tabelist jätame välja arvu 0, sest $x = 0$ ei kuulu määramispiirkonda ning täiendavalt lisame tabelisse arvud –0,5 ja 0,5.

x	–6	–5	–4	–3	–2	–1	–0,5	0,5	1	2	3	4	5	6
y	–0,5	–0,6	–0,75	–1	–1,5	–3	–6	6	3	1,5	1	0,75	0,6	0,5

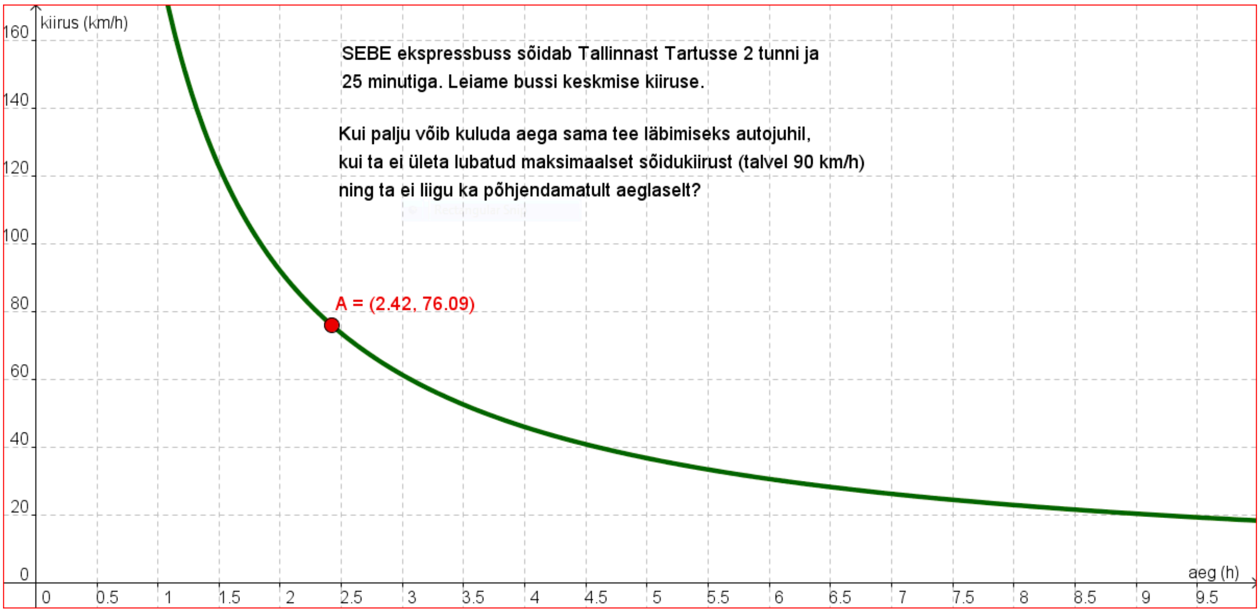
Kandes leitud punktid teljestikku ja ühendades need pideva joonega, saame hüperbooli.

Kui teeme joonise *GeoGebraga,* siis saab enne graafiku joonestamist koostada väärtuste tabeli. Seda on hea kasutada siis, kui õpilased arvutavad iseseisvalt funktsiooni väärtusi ning soovivad arvutustule–musi kontrollida.



Joonis 12

Õppekava järgi ei lahendata enam pöördvõrdelise sõltuvuse abil tekstülesandeid, kuid mõne reaalse sisuga näite võib klassis esitada, lahendada ja analüüsida. Soovitan selleks kasutada programmi *GeoGebra*.



Joonis 13

Liikumise graafikule kanname ühe punkti nii, et on nähtavad ka selle punkti koordinaadid. Punkti liigutamisel muutuvad ka koordinaadid (sõiduks kulunud aeg ja sõidukiirus). Joonisel 13 annavad punkti *A* koordinaadid vastuse esimesele ülesandele.

5. Ruutfunktsioon ja selle graafik

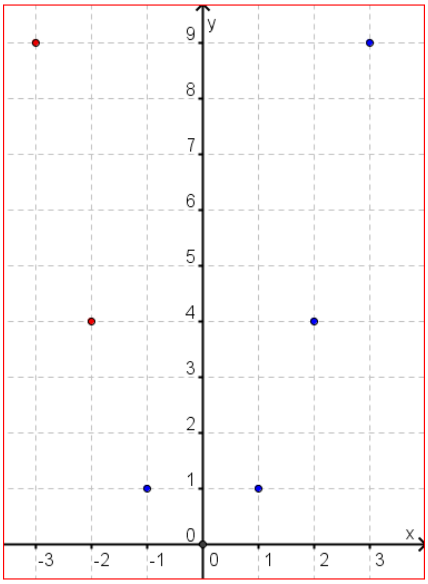
Ruutfunktsiooniks nimetatakse funktsiooni, mille saab esitada kujul $y = ax^2 + bx + c$, kus $a \neq 0$ ning b ja c on antud arvud.

Ruutfunktsiooni käsitlemiseks koolis on mitmeid võimalusi:
1) ruutvõrrandi lahendamist käsitletakse enne ruutfunktsiooni tundmaõppimist;
2) ruutfunktsiooni graafiku konstrueerimine on seotud vastava ruutvõrrandi lahendamisega;
3) ruutfunktsiooni käsitletakse enne vastavat võrrandit.

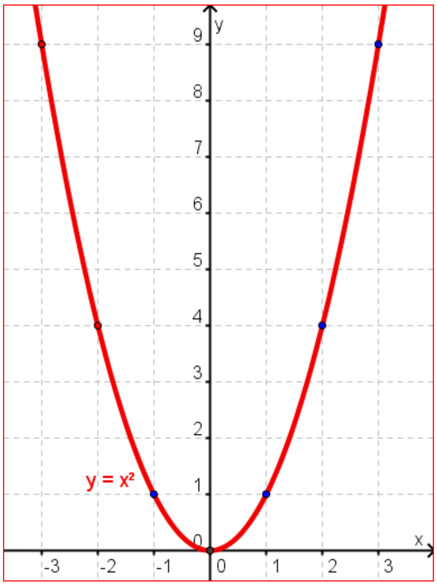
Kuna olen juba aastaid kasutanud teist varianti, siis pakun välja võimaliku teemade käsitlemise järjekorra:
1. Funktsioon $y = ax^2$.
2. Ruutfunktsioon $y = ax^2 + c$.
3. Ruutvõrrand $ax^2 + bx + c = 0$.
4. Ruutfunktsioon $y = ax^2 + bx$.
5. Ruutvõrrand $ax^2 + bx = 0$.
6. Ruutfunktsioon $y = ax^2 + bx + c$.
7. Ruutvõrrandi graafiline lahendamine.

Teema „Funktsioon $y = ax^2$“ juurde soovitan minna praktiliste ülesannete kaudu. Leiame sõltuvuse kuubi külje pikkuse a ja kuubi pindala S vahel (kuubi serva pikkuse ja vastava pindala märgime tabelisse), ringi raadiuse r ja pindala S vahel vms. Need sõltuvused esituvad valemina $S = 6a^2$ ja $S = \pi r^2$. Neid sõltuvusi saab esitada kujul $y = ax^2$.

Andes arvule *a* erinevaid väärtusi ($a = 1$; $a = 2$; $a = 0{,}5$; $a = -1$; $a = -2$ vms) koostame vastavad tabelid ning märgime saadud punktid koordinaatteljestikku. Visualiseerimiseks soovitan kasutada programmi *GeoGebra*. Kui punktid on koordinaatteljestikku märgitud (vt joonis 14), siis ühendame need pideva joonega (vt joonis 15).



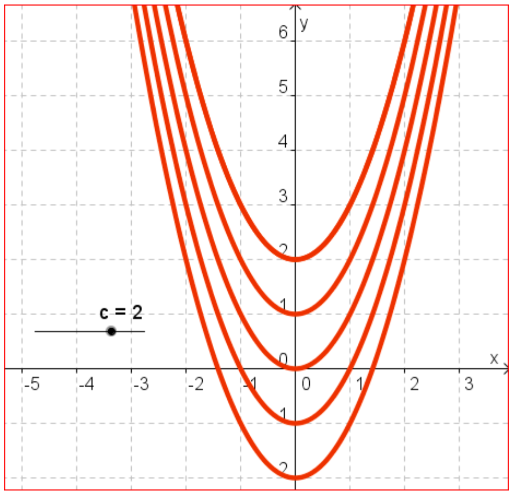
Joonis 14



Joonis 15

Kui õpilased teevad esimesed paraboolid vihikusse, siis tuleb tähelepanu pöörata sellele, et punkte ei ühendataks sirglõikudega ning parabooli tipus (haripunktis) ei oleks teravikpunkti. Mõisted „parabooli haripunkt“ ja „parabooli telg“ võtame kasutusele kohe, niipea kui oleme joonestanud esimesed paraboolid.

Teema „Ruutfunktsioon $y = ax^2 + c$“ visualiseerimiseks soovitan kasutada programmi *GeoGebra*. Muutes liuguri abil arvu *c* väärtusi näeme, et tekib terve „parv“ ühise teljega paraboole (vt joonis 16). Kui võrrandil $ax^2 + c = 0$ on lahendid, siis lõikab parabool *x*-telge (üldisemalt: abstsisstelge) kahes punktis. Nende punktide *x*-koordinaate nimetatakse funktsiooni **nullkohtadeks**. Programmi *GeoGebra* kasutajad peavad arvestama sellega, et kirjutades sisendreale korralduse **Nullokohad[x²-1]** saame algebravaatesse tulemuse A(–1; 0) ja B(1; 0), st nullkohtade asemel saame lõikepunktid *x*-teljega.



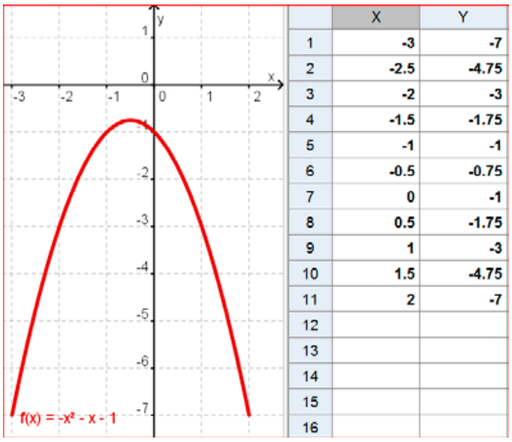
Joonis 16

Teema „Ruutfunktsioon $y = ax^2 + bx$“ puhul ilmneb graafikute joonestamisel, et üheks lõikepunktiks abstsissteljega on alati koordinaatide alguspunkti (0; 0). Tähelepanu tuleb juhtida sellele, et parabooli teljeks ei ole *y*-telg, vaid haripunkti läbiv verikaalne sirge.

Ruutfunktsiooni $y = ax^2 + bx + c$ graafiku konstrueerimist võib alustada väärtuste tabeli koostamisega, kuid siin tekib üks küsimus – missugused *x* väärtused on otstarbekas tabelisse võtta, et arvutustulemustest hiljem graafiku konstrueerimisel oleks kasu. Soovitan selle probleemi lahendamiseks järgmist võimalust:

a) lahendame võrrandi $ax^2 + bx = 0$;
b) kui võrrandi lahendid on x_1 ja x_2 ($x_1 < x_2$), siis võiks tabelisse võtta x väärtused lõigust $[x_1–2; x_2 + 2]$ või $[x_1–1; x_2 + 1]$.

Näide. Joonestame funktsiooni $y = –x^2 – x – 4$ graafiku.
Lahendame võrrandi $–x^2 – x = 0$, millest $x_1 = 0$ ja $x_2 = –1$.
Koostame tabeli lõigus [–3; 2] sammuga 0,5 ja teeme joonise (vt joonis 17).



	X	Y
1	-3	-7
2	-2.5	-4.75
3	-2	-3
4	-1.5	-1.75
5	-1	-1
6	-0.5	-0.75
7	0	-1
8	0.5	-1.75
9	1	-3
10	1.5	-4.75
11	2	-7
12		
13		
14		
15		
16		

Joonis 17

Ruutfunktsiooni käsitlemisel tuleb kindlasti vaadelda võimalikke rakendusi nii matemaatikas endas, kui ka teistes teadustes, näiteks füüsikas.

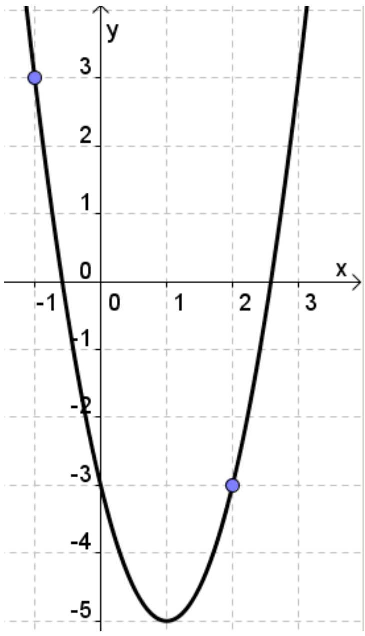
Näide. Ruutfunktsiooni $y = ax^2 – 4x + c$ graafik läbib punkte (–1; 3) ja (2; –3). Leiame kordajad a ja c. Asendades punktide koordinaadid parabooli võrrandisse, saame lineaarvõrrandisüsteemi

$$\begin{cases} a + 4 + c = 3 \\ 4a - 8 + c = -3 \end{cases},$$

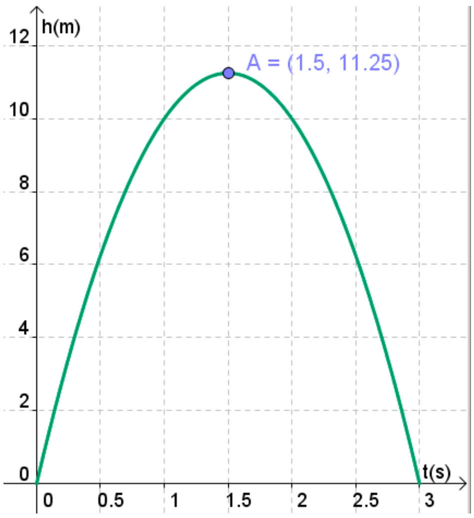
mille lahendid on $a = 2$ ja $c = –3$. Seega otsitav parabool on $y = 2x^2 – 4x – 3$. Lahenduse õigsust saame kontrollida joonise abil (joonis 18).

Näide. Vertikaalselt üles visatud keha kõrgus h avaldub funktsiooni $h(t) = 15t - 5t^2$ abil (h on kõrgus maapinnast meetrites ja aeg t sekundites). Kui kõrgele tõuseb see keha, kui palju kulub aega suurima kõrguse saavutamiseks ja mitme sekundi jooksul pärast ülesviskamist jõuab keha uuesti maapinnale?

Funktsioon $y = 15t – 5t^2$ esitab allapoole avaneva parabooli. Keha asub maapinnal, kui $y = 0$. Võrrandi $15t – 5t^2 = 0$ lahendid on 0 ja 3. Seega kukub keha maapinnale 3 sekundit pärast ülesviskamist. Suurima kõrguse maapinnast saavutab keha 1,5 sekundit pärast ülesviskamist (vt joonisel 19 punkt A) ja keha asub sel hetkel 11,25 m kõrgusel ($f(1,5) = 15·1,5 – 5·1,5^2 = 11,25$).



Joonis 18



Joonis 19

Kasutatud kirjandus ja Internetiressursid

1. Abel, E., Abel, M. ja Kaasik, Ü. (1998). Koolimatematemaatika Entsüklopeedia. Tartu: Ilmamaa.
2. Tõnso, T. (2002). Matemaatika VII klassile. Tallinn: Mathema.
3. Tõnso, T. (2001). Matemaatika IX klassile. Tallinn: Mathema.
4. http://et.wikipedia.org/wiki/Funktsioon , viimati külastatud 01.11.2010.a.